

ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА

З ТЕМИ:

«Корінь n -го степеня, його властивості. Ірраціональні вирази, їх перетворення»

Укладач: Щербакова Світлана Олександрівна

Курахівський заклад загальної середньої освіти І-ІІІ ст. №1

Курахівської міської ради

Донецької області

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Означення. Коренем n -го степеня ($n=2,3,4,5\dots$) з числа a називається таке число b , n -ий степінь якого дорівнює a , тобто:

$$\sqrt[n]{a} = b, b^n = a.$$

Якщо $n=2$, то пишуть $\sqrt{a}$ (2 не пишуть) і кажуть «корінь квадратний із a ».

Якщо $n=3$, то пишуть $\sqrt[3]{a}$, і замість «корінь третього степеня» часто говорять «корінь кубічний»

Приклад

Корінь третього степеня із числа 64 дорівнює 4, тобто $\sqrt[3]{64} = 4$, оскільки $4^3 = 64$.

Числа 3 і -3 є коренями четвертого степеня із числа 81, бо $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

Коренем n -ятого степеня із числа -32 є число -2, тобто $\sqrt[n]{-32} = -2$, оскільки $(-2)^5 = -32$



THEORY

Означення. Арифметичним коренем n -го степеня ($n=2,3,4,5\dots$) з невід'ємного числа a називається таке невід'ємне число b , n -ий степінь якого дорівнює a , тобто:

$$\sqrt[n]{a} = b, a \geq 0, b \geq 0, b^n = a.$$

Приклад

$\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geq 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geq 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[8]{0} = 0$, оскільки $0 \geq 0$ і $0^8 = 0$.

Тотожності для кореня n -го степеня



Для будь-якого $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ маємо тотожність:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$



для будь-якого числа a і непарного числа n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, маємо тотожність:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$



для коренів непарного степеня маємо тотожність:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ (бо $(-2)^3 = -8$) і $-\sqrt[3]{8} = -2$, то $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$

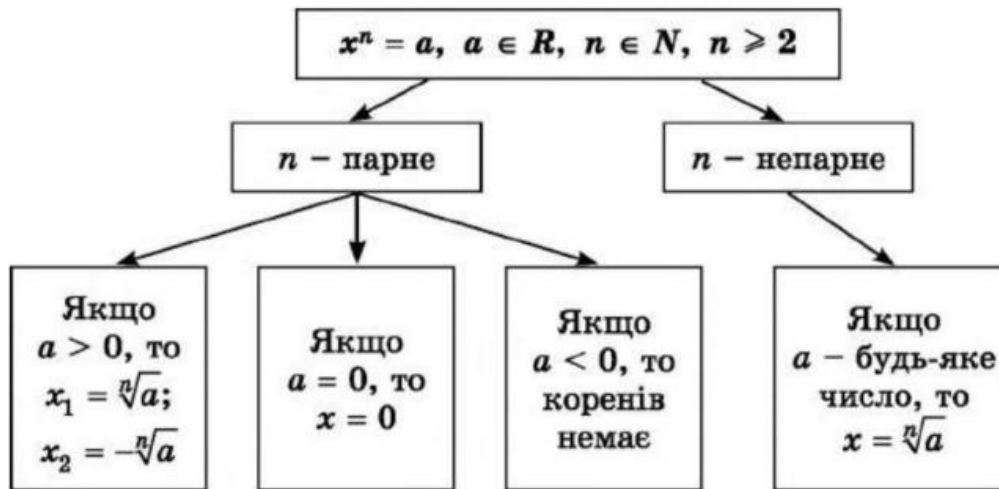
$\sqrt[4]{-16}$ не має змісту, оскільки $(-2)^4 = 2^4 = 16$



вираз $\sqrt[n]{a}$ при парному n має зміст лише для $a \geq 0$; при непарному n – для будь-якого значення a .

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

За допомогою кореня n -го степеня можна записувати корені рівняння $x^n = a$.



Приклад

Розв'язати рівняння

1) $x^4 = 625$

$$x_1 = \sqrt[4]{625}, x_2 = -\sqrt[4]{625}$$

$$x_1 = 5, x_2 = -5.$$

Відповідь: 5; -5

2) $x^8 = -1$

Відповідь: рівняння не має коренів.

3) $x^3 = 5$

$$x = \sqrt[3]{5}$$

Відповідь: $\sqrt[3]{5}$

4) $x^5 = -19$

$$x = -\sqrt[5]{19}$$

Відповідь: $-\sqrt[5]{19}$



THEORY

Властивості кореня n -го степеня

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0, b \geq 0$

Приклад

1) $\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$;

2) $\sqrt[4]{8 \cdot 162} = \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$.

Справедливою є і наступна тотожність: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $a \geq 0, b \geq 0$

Приклад

$$\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{4 \cdot 8} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Властивості кореня n -го степеня

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, b > 0$$

Приклад

$$1) \sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{256}} = \frac{1}{4}; \quad 2) \sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Справедливою є і наступна тотожність: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, b > 0$

Приклад

$$\frac{\sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} = \sqrt[5]{243} = 3; \quad \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{128}{250}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}.$$



THEORY

$$3. \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |a|, & \text{якщо } n - \text{парне,} \\ a, & \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{cases}$$

Приклад

$$\sqrt[8]{9^8} = |9| = 9; \quad \sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2; \\ \sqrt[9]{7^9} = 7; \quad \sqrt[5]{2^{10}} = \sqrt[5]{(2^2)^5} = \sqrt[5]{4^5} = 4.$$

$$4. \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}, \quad a \geq 0, k, n - \text{натуральні числа}$$

Приклад

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}; \quad \sqrt[3]{\sqrt{36}} = \sqrt[6]{36} = \sqrt[3]{\sqrt{36}} = \sqrt[3]{6}.$$

$$5. \sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}, \quad a \geq 0, k, n, m - \text{натуральні числа}$$

Приклад

$$\sqrt[20]{a^{15}} = \sqrt[5 \cdot 4]{a^{5 \cdot 3}} = \sqrt[4]{a^3}; \quad \sqrt[10]{b^6} = \sqrt[5 \cdot 2]{b^{3 \cdot 2}} = \sqrt[5]{|b^3|};$$

$$\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[7 \cdot 3]{2^7} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2};$$

$$\sqrt[5]{243^4} = \sqrt[5]{(3^5)^4} = \sqrt[5 \cdot 1]{3^{5 \cdot 4}} = 3^4 = 81.$$

$$6. (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \quad a > 0, n - \text{натуральне число, } k - \text{ціле число}$$

Приклад

$$1) (\sqrt[6]{4})^3 = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2;$$

$$2) (\sqrt[3]{5})^{-6} = \sqrt[3]{5^{-6}} = \sqrt[3]{(5^3)^{-2}} = (\sqrt[3]{5^3})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}.$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 1

Знайти: 1) $\sqrt[3]{27}$; 2) $\sqrt[4]{16}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; 4) $\sqrt[7]{0}$.

Розв'язання. 1) $\sqrt[3]{27} = 3$ (оскільки $3^3 = 27$ і $3 \geq 0$);

2) $\sqrt[4]{16} = 2$ (оскільки $2^4 = 16$ і $2 \geq 0$);

3) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$ (оскільки $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ і $\frac{1}{2} \geq 0$);

4) $\sqrt[7]{0} = 0$ (оскільки $0^7 = 0$ і $0 \geq 0$).

Приклад 2

Знайти значення виразу: $\sqrt[5]{3^4 + 5^2 + 137}$.

Розв'язання. Спочатку треба знайти значення підкореневого виразу $3^4 + 5^2 + 137$, а потім з отриманого значення добути корінь 5-го степеня:

$$\sqrt[5]{3^4 + 5^2 + 137} = \sqrt[5]{81 + 25 + 137} = \sqrt[5]{243} = 3 \text{ (бо } 3^5 = 243 \text{ і } 3 \geq 0\text{)}.$$

Відповідь. 3.

Обчисліть значення виразів:

1) $\sqrt{9} + \sqrt{4} - \sqrt[6]{64} = 3 + 2 - 2 = 3;$

2) $\sqrt{36} + \sqrt[4]{16} = 6 + 2 = 8;$

3) $12 - 6\sqrt[3]{0,125} = 12 - 6 \cdot 0,5 = 12 - 3 = 9;$

4) $1 + 10\sqrt[4]{0,0081} = 1 + 10 \cdot 0,3 = 4;$

5) $3\sqrt[4]{16} - 4\sqrt[3]{27} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 6 - 12 = -6;$

6) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt{2,25} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} + 1,5 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0;$

7) $\sqrt{0,81} + \sqrt[3]{0,001} = 0,9 + 0,1 = 1;$

8) $0,2\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\sqrt[4]{625} = 0,2 \cdot 10 - \frac{3}{5} \cdot 5 = 2 - 3 = -1.$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 3 Розв'язати рівняння

1) $x^4 = 81$; 2) $x^6 = -1$; 3) $x^5 = 19$; 4) $(2x - 1)^8 = 1$.

Розв'язання. 1) $x_1 = \sqrt[4]{81}$, $x_2 = -\sqrt[4]{81}$. Отже, $x_1 = 3$; $x_2 = -3$.

2) Коренів немає.

3) $x = \sqrt[5]{19}$; корінь рівняння $x^5 = 19$ є ірраціональним числом.

4) Маємо: $\begin{array}{l} 2x - 1 = \sqrt[8]{1} \\ 2x - 1 = 1 \end{array}$ або $\begin{array}{l} 2x - 1 = -\sqrt[8]{1} \\ 2x - 1 = -1 \end{array}$;
 $\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0. \end{array}$

Отже, рівняння має два корені: 0 і 1.

Відповідь. 1) 3; -3; 2) коренів немає; 3) $\sqrt[5]{19}$; 4) 0; 1.

Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 = 16$;

$x = \pm \sqrt[4]{16}$;

$x_1 = -2$; $x_2 = 2$;

Відповідь: -2; 2

2) $x^3 = -64$;

$x = \sqrt[3]{-64}$;

$x = -4$.

Відповідь: -4.

3) $(x - 4)^6 = -32$;

$x - 4 = \pm \sqrt[6]{-32}$;

Відповідь: рівняння не має коренів.

4) $\frac{1}{4}x^5 + 8 = 0$;

$\frac{1}{4}x^5 = -8$;

$x^5 = -32$;

$x = -2$.

Відповідь: -2.

5) $(x + 3)^4 = 81$;

$x + 3 = -\sqrt[4]{81}$ або $x + 3 = \sqrt[4]{81}$;

$x + 3 = -3$ або $x + 3 = 3$;

$x_1 = -6$, $x_2 = 0$.

Відповідь: -6; 0.

6) $8x^4 + 8 = 0$;

$8x^4 = -8$;

$x^4 = -1$.

Відповідь: рівняння не має коренів.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 4 Спростити вираз:

- 1) $\sqrt{p^6}$; 2) $\sqrt[8]{a^8}$, якщо $a \geq 0$; 3) $\sqrt[3]{c^{12}}$;
4) $\sqrt[4]{16m^8}$; 5) $\sqrt[10]{1024a^{10}}$, якщо $a \leq 0$; 6) $\sqrt[5]{a^5b^{10}}$.

Розв'язання. 1) $\sqrt{p^6} = \sqrt{(p^3)^2} = |p^3|$.

2) $\sqrt[8]{a^8} = |a|$. Оскільки $a \geq 0$, то $|a| = a$, а тому $\sqrt[8]{a^8} = a$.

3) $\sqrt[3]{c^{12}} = \sqrt[3]{(c^4)^3} = c^4$.

4) $\sqrt[4]{16m^8} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{m^8} = 2\sqrt[4]{(m^2)^4} = 2|m^2|$. Оскільки $m^2 \geq 0$ для будь-якого m , то $|m^2| = m^2$, а тому $\sqrt[4]{16m^8} = 2m^2$.

5) $\sqrt[5]{a^5b^{10}} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^{10}} = a\sqrt[5]{(b^2)^5} = ab^2$.

6) $\sqrt[10]{1024a^{10}} = \sqrt[10]{1024} \cdot \sqrt[10]{a^{10}} = 2|a|$. Оскільки $a \leq 0$, то $|a| = -a$, а тому $\sqrt[10]{1024a^{10}} = -2a$.

Відповідь. 1) $|p^3|$; 2) a ; 3) c^4 ; 4) $2m^2$; 5) ab^2 ; 6) $-2a$.

Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$;

2) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 625} = \sqrt[4]{0,0081} \cdot \sqrt[4]{625} = 0,3 \cdot 5 = 1,5$;

3) $\sqrt[3]{4^6 \cdot 3^9} = \sqrt[3]{4^6} \cdot \sqrt[3]{3^9} = 4^2 \cdot 3^3 = 16 \cdot 27 = 432$;

4) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{32} = 2$;

5) $\sqrt[3]{0,108} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{0,216} = 0,6$;

6) $\sqrt[8]{3^5 \cdot 5^2} \cdot \sqrt[8]{3^3 \cdot 5^6} = \sqrt[8]{3^8 \cdot 5^8} = \sqrt[8]{15^8} = 15$;

7) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{729}} = \sqrt[5]{\frac{96}{729}} = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$;

8) $\frac{\sqrt[3]{5^8 \cdot 7^{10}}}{\sqrt[3]{5^2 \cdot 7^{16}}} = \sqrt[3]{\frac{5^8 \cdot 7^{10}}{5^2 \cdot 7^{16}}} = \sqrt[3]{5^6 \cdot \frac{1}{7^6}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{7}\right)^6} = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$;

9) $\sqrt[3]{5 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5 + \sqrt{17}} = \sqrt[3]{(5 - \sqrt{17}) \cdot (5 + \sqrt{17})} = \sqrt[3]{25 - 17} = \sqrt[3]{8} = 2$.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 5 Винести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{108}$; 2) $\sqrt[5]{160t}$.

Розв'язання. 1) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \cdot 4} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$.

2) $\sqrt[5]{160t} = \sqrt[5]{32 \cdot 5t} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{5t} = 2\sqrt[5]{5t}$.

Відповідь. 1) $3\sqrt[3]{4}$; 2) $2\sqrt[5]{5t}$.

Приклад 6 Винести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[5]{x^{11}}$; 2) $\sqrt[4]{a^{15}}$; 3) $\sqrt[8]{-b^{11}}$.

Розв'язання.

1) $\sqrt[5]{x^{11}} = \sqrt[5]{x^{10} \cdot x} = \sqrt[5]{x^{10}} \cdot \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{(x^2)^5} \cdot \sqrt[5]{x} = x^2 \sqrt[5]{x}$.

2) $\sqrt[4]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^{12} \cdot a^3} = \sqrt[4]{a^{12}} \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{(a^3)^4} \cdot \sqrt[4]{a^3} = |a^3| \sqrt[4]{a^3}$.

Очевидно, областю допустимих значень виразу $\sqrt[4]{a^{15}}$ є невід'ємні значення a , тобто $a \geq 0$. Тоді $a^3 \geq 0$, а отже, $|a^3| = a^3$. Маємо: $\sqrt[4]{a^{15}} = a^3 \sqrt[4]{a^3}$.

3) Область допустимих значень виразу можна знайти з нерівності $-b^{11} \geq 0$, тобто $b^{11} \leq 0$. Отже, $b \leq 0$, тому $|b| = -b$. Тепер виконаємо винесення множника з-під знака кореня:

$\sqrt[8]{-b^{11}} = \sqrt[8]{b^8 \cdot (-b^3)} = \sqrt[8]{b^8} \cdot \sqrt[8]{-b^3} = |b| \sqrt[8]{-b^3} = -b \sqrt[8]{-b^3}$.

Відповідь: 1) $x^2 \sqrt[5]{x}$; 2) $b^2 \sqrt[6]{b}$; 3) $a^3 \sqrt[4]{a^3}$; 4) $-b \sqrt[8]{-b^3}$.

Винесіть множник за знак кореня:

1) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$;

2) $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}$;

3) $\sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{625 \cdot 2} = 5\sqrt[4]{2}$;

4) $\sqrt[6]{320} = \sqrt[6]{64 \cdot 5} = 2\sqrt[6]{5}$;

5) $\sqrt[3]{3000} = \sqrt[3]{3 \cdot 1000} = 10\sqrt[3]{3}$;

6) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$;

7) $\sqrt[5]{486} = \sqrt[5]{243 \cdot 2} = 3\sqrt[5]{2}$;

8) $\sqrt[4]{324} = \sqrt[4]{81 \cdot 4} = 3\sqrt[4]{4}$.

Винесіть множник за знак кореня:

1) $\sqrt{8a^4} = \sqrt{4a^4 \cdot 2} = 2a^2\sqrt{a}$;

2) $\sqrt[4]{x^9} = \sqrt[4]{x^8 \cdot x} = x^2\sqrt[4]{x}$;

3) $\sqrt[3]{-a^{10}} = -\sqrt[3]{a^9 \cdot a} = -a^3\sqrt[3]{a}$;

4) $\sqrt[4]{x^6y^5} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 \cdot y^4 \cdot y} = xy\sqrt[4]{x^2y}$

5) $\sqrt[4]{162a^6} = \sqrt[4]{81a^4 \cdot 2a^2} = 3a\sqrt[4]{2a^2}$;

6) $\sqrt[3]{32a^5b^3} = \sqrt[3]{8a^3b^3 \cdot 4a^2} = 2ab\sqrt[3]{4a^2}$;

7) $\sqrt[6]{a^6b^7} = \sqrt[6]{a^6b^6b} = ab\sqrt[6]{b}$;

8) $\sqrt[5]{a^{11}b^6} = \sqrt[5]{a^{10}b^5 \cdot ab} = a^2b\sqrt[5]{ab}$.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 7 Внести множник під знак кореня:

1) $2\sqrt[5]{3}$; 2) $-3\sqrt[6]{2}$.

Розв'язання. 1) $2\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{96}$.

2) $-3\sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{3^6} \sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{729} \cdot \sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{729 \cdot 2} = -\sqrt[6]{1458}$.

Зверніть увагу, що під знак кореня парного степеня вносимо лише модуль множника, знак множника залишаємо перед коренем.

Відповідь. 1) $\sqrt[5]{96}$; 2) $-\sqrt[6]{1458}$.

Приклад 8 Внести множник під знак кореня:

1) $c\sqrt[3]{5}$; 2) $m\sqrt[8]{2}$, якщо $m \geq 0$; 3) $a\sqrt[4]{b}$, якщо $a < 0$; 4) $b\sqrt[6]{7}$

Розв'язання. 1) $c\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{c^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5c^3}$;

2) Оскільки $m \geq 0$, то $m = |m| = \sqrt[8]{m^8}$, тому $m\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{m^8} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2m^8}$.

3) Оскільки $a < 0$, то $a = -|a| = -\sqrt[4]{a^4}$, тому $a\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4b}$.

4) Оскільки в умові не задано обмежень для змінної b , розглянемо два випадки.

Якщо $b \geq 0$, то $b\sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{b^6} \cdot \sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{7b^6}$.

Якщо $b < 0$, то $b\sqrt[6]{7} = -\sqrt[6]{b^6} \cdot \sqrt[6]{7} = -\sqrt[6]{7b^6}$.

Відповідь. 1) $\sqrt[3]{5c^3}$; 2) $\sqrt[8]{2m^8}$; 3) $-\sqrt[4]{a^4b}$;
4) $\sqrt[6]{7b^6}$, якщо $b \geq 0$; $-\sqrt[6]{7b^6}$, якщо $b < 0$.

Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$;

2) $3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{81}$;

3) $2\sqrt[6]{0,25} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 0,25} = \sqrt[6]{16}$.

Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2 \cdot 7} = \sqrt{7a^2}$;

2) $a\sqrt{-a} = \sqrt{a^2 \cdot (-a)} = \sqrt{-a^3}$;

3) $a\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a^3} = \sqrt[4]{a^7}$;

4) $2x\sqrt[3]{3x^2} = \sqrt[3]{(2x)^3 \cdot 3x^2} = \sqrt[3]{8x^3 \cdot 3x^2} = \sqrt[3]{24x^5}$;

5) $ab\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5a^4b^4}$;

6) $a^2\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{(a^2)^3 ab} = \sqrt[3]{a^7b}$;

7) $3a\sqrt[4]{2b} = \sqrt[4]{(3a)^4 \cdot 2b} = \sqrt[4]{162a^4b}$;

8) $0,5b\sqrt[5]{(2b)^3} = \sqrt[5]{(0,5b)^5 \cdot 8b^3} = \sqrt[5]{0,25b^8}$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 9

Спростити вираз $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$.

Розв'язання. Внесемо множник 5 під знак квадратного кореня і далі застосуємо властивості кореня n -го степеня:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2} \cdot 5} = \sqrt[3]{\sqrt{5^3}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{\sqrt[3]{5^3}} = \sqrt{5}.$$

Відповідь. $\sqrt{5}$.

Приклад 10

Скоротити дріб: 1) $\frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$; 2) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{2x} - \sqrt{2}}$.

Розв'язання. Вирази $\sqrt[6]{a}$ і $\sqrt[6]{b}$ мають зміст для $a \geq 0$ і $b \geq 0$, тому $\sqrt[3]{a} = (\sqrt[6]{a})^2$ і $\sqrt[3]{b} = (\sqrt[6]{b})^2$.

Маємо:

$$\frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{(\sqrt[6]{a})^2 - (\sqrt[6]{b})^2} = \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})} = \frac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}.$$

2) З умови випливає, що $x \geq 0$; $x \neq 2$. Для таких значень x маємо: $\sqrt{x} = \sqrt[4]{x^2} = (\sqrt[4]{x})^2$, крім того, $\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2} = (\sqrt[4]{2})^2$. Тоді:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{2x} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt[4]{x})^2 - \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x} - (\sqrt[4]{2})^2} = \frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})}{\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})} = \sqrt[4]{\frac{x}{2}}.$$

Відповідь. 1) $\frac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 11 Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt[3]{4}+1}$.

Розв'язання. 1) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2 \cdot \sqrt[5]{2^3}}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{2}$.

2) Щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{10}{\sqrt[3]{4}+1}$, помножимо його чисельник і знаменник на вираз, спряжений до знаменника, тобто на неповний квадрат різниці чисел $\sqrt[3]{4}$ і 1. Маємо:

$$\begin{aligned}\frac{10}{\sqrt[3]{4}+1} &= \frac{10((\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{4} \cdot 1 + 1^2)}{(\sqrt[3]{4}+1)((\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{4} \cdot 1 + 1^2)} = \frac{10(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)}{(\sqrt[3]{4})^3 + 1^3} = \\ &= \frac{10(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)}{4+1} = \frac{10(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)}{5} = 2(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1).\end{aligned}$$

Відповідь. 1) $\frac{\sqrt[5]{8}}{2}$; 2) $2(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$;

2) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}} = \frac{6^3\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{6^3\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{6^3\sqrt[3]{9}}{3} = 2^3\sqrt[3]{9}$;

3) $\frac{14}{\sqrt[4]{8}} = \frac{14^4\sqrt[4]{8^3}}{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{8^3}} = \frac{14^4\sqrt[4]{512}}{\sqrt[4]{8^4}} = \frac{14^4\sqrt[4]{512}}{8} = \frac{7^4\sqrt[4]{512}}{4}$;

4) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^4}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}$;

5) $\frac{3}{\sqrt[3]{9a}} = \frac{3^3\sqrt[3]{81a^2}}{9a} = \frac{\sqrt[3]{81a^2}}{3a}$;

6) $\frac{10a}{\sqrt[5]{2a^2}} = \frac{10a^5\sqrt[5]{(2a^2)^4}}{\sqrt[5]{2a^2} \cdot \sqrt[5]{(2a^2)^4}} = \frac{10a^5\sqrt[5]{16a^8}}{2a^2}$.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{33}{\sqrt{17} - \sqrt{6}} = \frac{33(\sqrt{17} + \sqrt{6})}{(\sqrt{17} - \sqrt{6})(\sqrt{17} + \sqrt{6})} = \frac{33(\sqrt{17} + \sqrt{6})}{17 - 6} = \frac{33(\sqrt{17} + \sqrt{6})}{11} = 3(\sqrt{17} + \sqrt{6});$$

$$2) \frac{18}{3 + \sqrt{3}} = \frac{18 \cdot (3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{18 \cdot (3 - \sqrt{3})}{9 - 3} = \frac{18 \cdot (3 - \sqrt{3})}{6} = 3(3 - \sqrt{3});$$

$$3) \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1;$$

$$4) \frac{10}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \frac{10(\sqrt[3]{3} - 1)}{(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{3} - 1)} = \frac{10(\sqrt[3]{3} - 1)}{(\sqrt[3]{3})^3 - 1^3} = 5(\sqrt[3]{3} - 1).$$

Приклад 12

Спростити $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt[4]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2} \cdot \sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} + a}$.

Розв'язання. Зазначимо, що

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{9 \pm 4\sqrt{5}} &= \sqrt[4]{5 \pm 4\sqrt{5} + 4} = \sqrt[4]{(\sqrt{5})^2 \pm 2\sqrt{5} \cdot 2 + 2^2} = \\ &= \sqrt[4]{(\sqrt{5} \pm 2)^2} = \sqrt{|\sqrt{5} \pm 2|} = \sqrt{\sqrt{5} \pm 2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Тоді } \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt[4]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2} \cdot \sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} + a} &= \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} + a} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} + (\sqrt[3]{a})^3} = \\ &= \frac{1 + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{1 + (\sqrt[3]{a})^3} = \frac{1 - \sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2}{(1 + \sqrt[3]{a})(1 - \sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2)} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}}.\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}}.$

ВІДЕО БЛОК



**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№1. Скільки всього цілих чисел містить інтервал $(\sqrt{8}; \sqrt{81})$?

А	Б	В	Г	Д
8	7	6	5	4

№2. Якому проміжку належить значення виразу $\frac{-1+\sqrt{27}}{2}$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; +\infty)$

№3. Якому проміжку належить число $\sqrt[3]{18}$?

А	Б	В	Г	Д
$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$	$[4; +\infty)$

№4. $\sqrt{(-2)^2} + \sqrt[3]{(-3)^3} =$

А	Б	В	Г	Д
-23	-5	-1	1	5

№5. Спростіть вираз $\frac{\sqrt[3]{64}}{64}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	4	16

№6. Запишіть числа $\sqrt[3]{2}$, 1, $\sqrt[5]{3}$ в порядку зростання

А	Б	В	Г	Д
$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}$	$1, \sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}, 1$	$\sqrt[5]{3}, 1, \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}, 1, \sqrt[5]{3}$

№7. Серед чисел $a = \sqrt{5} - 2$, $b = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$, $c = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ вкажіть усі додатні

А	Б	В	Г	Д
a	c	$a; b$	$a; c$	$a; b; c$

№8. Якому з наведених проміжків належить число $\sqrt[4]{30}$?

А	Б	В	Г	Д
$(1; 2)$	$(2; 3)$	$(3; 4)$	$(4; 5)$	$(5; 6)$

№9. Обчисліть $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$

А	Б	В	Г	Д
64	18	8	4	2

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№10. Якщо $F = \frac{GMm}{R^2}$ і $R > 0, R =$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{FGMm}$	$\sqrt{\frac{Mm}{FG}}$	$\sqrt{\frac{FG}{Mm}}$	$\sqrt{\frac{F}{GMm}}$	$\sqrt{\frac{GMm}{F}}$

№11. Укажіть правильну нерівність, якщо $a = 5\sqrt{2}, b = 7, c = \sqrt{51}$

А	Б	В	Г	Д
$b < a < c$	$a < b < c$	$c < a < b$	$a < c < b$	$b < c < a$

№12. Обчисліть $\sqrt{125^5 \sqrt{32}} - 5^{\frac{1}{2}}$

А	Б	В	Г	Д
$11\sqrt{5}$	$10\sqrt{2} - \sqrt{5}$	9	$9\sqrt{5}$	$^{10}\sqrt{4000} - \sqrt{5}$

№13. Обчисліть $(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}})^2$

А	Б	В	Г	Д
0	2	$2\sqrt{5}$	4	6

№14. Обчисліть значення виразу $\sqrt{9a^2 - 24a + 16} - \sqrt[3]{27a^3}$ за $a = 0,7$

№15. Обчисліть значення виразу $\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}$

№16. Обчисліть $(\sqrt[6]{27} + \sqrt[4]{64})(\sqrt[6]{27} - \sqrt[4]{64})$

№17. Обчисліть значення виразу $\frac{53}{8-\sqrt{11}} + \frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{13}+2}$

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№1. В

$$\sqrt{8} < x < \sqrt{81}$$

$$\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 \quad 3 \leq x < 9$$

$$\sqrt{81} = 9 \quad x = 3, 4, 5, 6, 7, 8 - \text{шість цілих чисел.}$$

№2. Г.

Оцінимо вираз.

$$\sqrt{25} < \sqrt{27} < \sqrt{36},$$

$$5 < \sqrt{27} < 6,$$

$$4 < \sqrt{27} - 1 < 5,$$

$$2 < \frac{\sqrt{27} - 1}{2} < 2,5.$$

Отже, значення виразу належить проміжку $[2; 3)$.

№3. В.

Оцінимо вираз

$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{18} < \sqrt[3]{27}$$

$$2 < \sqrt[3]{18} < 3$$

Отже, значення виразу належить проміжку $[2; 3)$.

№4. В.

За означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{a^2} = |a|$,

$$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2. \text{ За означенням, } \sqrt[3]{a^3} = a, \text{ оскільки корінь кубічний існує з будь-}$$

$$\text{якого числа. Тоді } \sqrt{(-2)^2} + \sqrt[3]{(-3)^3} = |-2| + (-3) = 2 - 3 = -1.$$

№5. А.

$$64 = 4^3, \text{ то}$$

$$\frac{\sqrt[3]{64}}{64} = \frac{\sqrt[3]{4^3}}{64} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}.$$

№6. Б.

Запишемо всі числа у вигляді кореня 15 степеня.

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32};$$

$$\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{27};$$

$$1 = \sqrt[15]{1}.$$

Отже, в порядку зростання дані числа запишемо

$$\sqrt[15]{1}; \sqrt[15]{27}; \sqrt[15]{32} \text{ або } 1; \sqrt[5]{3}; \sqrt[3]{2}.$$

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№7. Г

$$a = \sqrt{5} - \sqrt{4} > 0, \sqrt{5} > \sqrt{4}$$

$$b = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = \sqrt{12} - \sqrt{18} < 0, \sqrt{12} < \sqrt{18}.$$

$$c = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}.$$

З них додатні a та c .

№8. Б.

Знайдемо, між якими цілими числами лежить число $\sqrt[4]{30}$:

$$2^4 = 16, 3^4 = 81.$$

Отже,

$$\sqrt[4]{16} < \sqrt[4]{30} < \sqrt[4]{81}$$

$$2 < \sqrt[4]{30} < 3.$$

№9. Г.

$$\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

№10. Д.

$$F = \frac{GMm}{R^2}, R > 0.$$

$$FR^2 = GMm, R^2 = \frac{GMm}{F},$$

$$R = \sqrt{\frac{GMm}{F}}$$

№11. А.

Для того, щоб порівняти числа, внесемо множник під знак кореня:

$$a = 5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}.$$

$$b = 7 = \sqrt{49}.$$

$$c = \sqrt{51}.$$

Отже, $\sqrt{49} < \sqrt{50} < \sqrt{51}$. Тому $b < a < c$.

№12. Г.

$$\sqrt[5]{32} = 2, 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{125} \sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{25 \cdot 5} \cdot 2 - \sqrt{5} = 2\sqrt{25} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} = \\ &= 2 \cdot 5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 10\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}(10 - 1) = 9\sqrt{5}. \end{aligned}$$

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№13. Б.

Скористаємось формулою скороченого множення $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 &= \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} + \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = \\ &= 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + 3 - \sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 2\sqrt{4} = \\ &= 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2. \end{aligned}$$

№14.

$$\begin{aligned} \sqrt{9a^2 - 24a + 16} - \sqrt[3]{27a^3} &= \sqrt{(3a-4)^2} - 3a = \\ &= |3a-4| - 3a = -(3a-4) - 3a = -3a+4-3a = -6a+4 \end{aligned}$$

Вираз $3a-4 = 3 \cdot 0,7 - 4 = 2,1 - 4 = -1,9$.

Отже, $|3a-4| = -3a+4$.

Значення виразу

$$-6a+4 = -6 \cdot 0,7 + 4 = -4,2 + 4 = -0,2.$$

Відповідь: -0,2.

№15.

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}} &= \frac{(3\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{6}-10\sqrt{3})}{3} = \\ &= \frac{6+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}-5}{2-1} + \frac{6\sqrt{2}-30}{3} = 1-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-10 = -9. \end{aligned}$$

Відповідь: -9

№16.

$$\begin{aligned} (\sqrt[6]{27} + \sqrt[4]{64})(\sqrt[6]{27} - \sqrt[4]{64}) &= (\sqrt[6]{27})^2 - (\sqrt[4]{64})^2 = \\ &= \sqrt[6]{3^6} - \sqrt[4]{2^{12}} = 3 - 2^3 = 3 - 8 = -5. \end{aligned}$$

Відповідь: -5

№17.

$$\begin{aligned} \frac{53}{8-\sqrt{11}} + \frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{13}+2} &= \frac{53(8+\sqrt{11})}{(8-\sqrt{11})(8+\sqrt{11})} + \\ &+ \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{(\sqrt{13}-\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})} - \frac{9(\sqrt{13}-2)}{(\sqrt{13}+2)(\sqrt{13}-2)} = \\ &= \frac{53(\sqrt{11}+8)}{64-11} + \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{13-11} - \frac{9(\sqrt{13}-2)}{13-4} = \\ &= \frac{53(\sqrt{11}+8)}{53} + \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{2} - \frac{9(\sqrt{13}-2)}{9} = \\ &= 8 + \sqrt{11} + \sqrt{13} - \sqrt{11} - \sqrt{13} + 2 = 10. \end{aligned}$$

Відповідь: 10