

ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА

З ТЕМИ:

**«Логарифми, властивості
логарифмів. Перетворення
логарифмічних виразів.»**

Укладач: Кодак Юлія Вікторівна

Курахівський заклад загальної середньої освіти І-ІІІ ст. №1

Курахівської міської ради

Донецької області

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовились називати логарифмом числа 5 з основою 2 і позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ – це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5.

Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b .

Приклад.

А) $\log_3 9 = 2$;

Б) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$;

В) $\log_{100} 1 = 0$.



THEORY

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність $a^{\log_a b} = b$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю**.

Дію знаходження числа c за даними числами a і b , де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, називають логарифмуванням числа b за основою a . ($c = \log_a b$). При $b \leq 0$ вираз $\log_a b$ немає змісту.



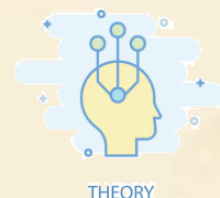
ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Десятковими логарифмами називаються логарифми за основою 10, позначаються lg .

Наприклад, $lg100 = 2$, $lg0,0001 = -4$.

Натуральними логарифмами називаються логарифми за основою e (число e — ірраціональне, $e = 2,7\dots$), позначаються ln .

Наприклад: $ln e = 1$, $ln e^2 = 2$, $ln \frac{1}{e} = -1$.



При виконанні перетворень виразів, які містять логарифми, при обчисленнях і при розв'язуванні рівнянь, нерівностей часто використовуються властивості логарифмів.

Для будь-яких $a > 0$, $a \neq 1$ і будь-яких додатних x і y виконуються рівності:

1. $\log_a 1 = 0$;
2. $\log_a a = 1$;
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
5. $\log_a x^p = p \log_a x$ ($p \in R$);
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$ ($p \in R$);
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 1 Чи правильно є рівність?

1. $\log_7 \frac{1}{49} = -3$, ні так як $7^{-3} = \frac{1}{343}$
2. $\log_{25} 5 = 2$, ні так як $25^2 = 625$
3. $\log_5 125 = \frac{1}{3}$, ні так як $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$
4. $\log_3 \frac{1}{81} = -4$, так адже $3^{-4} = \frac{1}{81}$
5. $\log_{0,01} 10 = 2$, ні так як $0,01^2 = 0,0001$
6. $\lg 0,0001 = -4$, так адже $10^{-4} = 0,0001$
7. $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = \frac{2}{3}$, ні так як $(\frac{1}{9})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$
8. $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$, так адже $\sqrt{5}^{-2} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0,2$

Приклад 2 Знайти логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа: 1) 1; 2) $\frac{1}{16}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) 64.

Рішення

$$1) \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0; \quad 2) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4; \quad 3) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}; \quad 4) \log_{\frac{1}{2}} 64 = -6.$$

Приклад 3 Чому дорівнює логарифм числа 10000 з основою: 1) 10; 2) 100; 3) 0,1 4) 1000.

Рішення

$$1) \lg 10000 = 4; \quad 2) \log_{100} 10000 = 2; \quad 3) \log_{0,1} 10000 = -4; \quad 4) \log_{1000} 10000 = \frac{4}{3}.$$

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння

Рішення

$$\begin{array}{llll} 1) \log_7 x = -1; & 2) \log_4 x = \frac{1}{2}; & 3) \log_{\sqrt{3}} x = 6 & 4) \log_x 11 = -1 \\ x = 7^{-1} = \frac{1}{7}; & x = 4^{\frac{1}{2}} = 2; & x = \sqrt{3}^6 = 3^3 = 27 & x^{-1} = 11 \\ & & & x = \frac{1}{11} \end{array}$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 5 Обчислити значення виразу

Рішення

$$1) \log_6 18 + \log_6 2 = \log_6(18 \cdot 2) = \log_6 36 = 2;$$

$$2) \log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1;$$

$$3) \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$4) \log_{125} 5 = \log_{125} 5 = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3};$$

$$5) \frac{\log_3 16}{\log_3 4} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Приклад 6 Обчислити значення виразу

Рішення

$$\log_2 8 \cdot \log_8 14 \cdot \log_{14} 20 \cdot \log_{20} 25 \cdot \log_{25} 32 =$$

застосуємо формулу переходу від однієї основи логарифма до другої основи:

$$= \log_2 8 \cdot \frac{\log_2 14}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 20}{\log_2 14} \cdot \frac{\log_2 25}{\log_2 20} \cdot \frac{\log_2 32}{\log_2 25} = \log_2 32 = 5$$

Приклад 6 Знайти x за даним логарифмом:

$$a) \log_5 27 + \log_5 \frac{1}{3} = \log_5 x;$$

$$\log_5 27 + \log_5 \frac{1}{3} = \log_5(27 \cdot \frac{1}{3}) = \log_5 3 \Rightarrow x=3$$

$$б) \log_5 x = \frac{1}{3} \log_5 8 - 2;$$

$$\frac{1}{3} \log_5 8 - 2 = \log_5 8^{\frac{1}{3}} - \log_5 100 = \log_5 2 \Rightarrow x=2$$

$$в) \log_3 120 - \log_3 15 = \log_3 x;$$

$$\log_3 120 - \log_3 15 = \log_3(120 : 15) = \log_3 8 \Rightarrow x=8$$

$$г) \log_{20} x = 1 + \log_{20} 10;$$

$$1 + \log_{20} 10 = \log_{20} 20 + \log_{20} 10 = \log_{20}(20 \cdot 10) = \log_{20} 200 \Rightarrow x=200$$

ВІДЕО БЛОК

**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№1

Укажіть правильну подвійну нерівність, якщо $a = 0,5^{-1}$, $b = 0,2$, $c = \log_{0,2} 5$

А	Б	В	Г	Д
$c < b < a$	$b < c < a$	$a < c < b$	$c < a < b$	$b < a < c$

№2

Якому з наведених проміжків належить число $\log_2 \frac{1}{3}$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$(-3; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; 3)$	$(3; +\infty)$

№3

Обчисліть значення виразу $\log_3 45 + \log_3 900 - \log_3 500$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	4	3	27	$\log_3 445$

№4

Укажіть проміжок, якому належить число $\log_2 9$

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$	$(3; 4)$	$(4; 5)$

№5

$\log_3 54 - \log_3 2 =$

А	Б	В	Г	Д
$\log_3 52$	3	9	24	27

№6

$\log_2 5 + \log_2 1,6 =$

А	Б	В	Г	Д
3	3,3	0,25	4	$\log_2 6,6$

№7

$\log_{5^{-2}} 5^{\frac{1}{2}} =$

А	Б	В	Г	Д
0,25	-1	0,5	-2	-0,25

№8

Укажіть проміжок, якому належить число $\log_5 4$

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$	$(3; 4)$	$(4; 5)$

№9

$\frac{\lg 25}{\lg 5} =$

А	Б	В	Г	Д
$\lg 5$	5	$\lg 20$	2	0,5

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№10

$$\log_5 49 + 2 \log_5 \frac{5}{7}$$

А	Б	В	Г	Д
25	$\log_5 70$	$\log_5 49 \frac{5}{7}$	$\log_5 35$	2

№11

$$\text{Обчисліть } \log_2 \frac{1}{8} + \log_5 25$$

А	Б	В	Г	Д
2	-1	5	$\lg \frac{25}{8}$	$\log_7 25 \frac{1}{8}$

№12

$$\text{Обчисліть } \log_3 18 - \log_3 2$$

А	Б	В	Г	Д
2	3	$\log_3 16$	6	9

№13

$$\text{Обчисліть } \log_a \sqrt{ab}, \text{ якщо } \log_a b = 7$$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	2	3	$\frac{7}{2}$	4

№14

$$\text{Обчисліть } \log_{\frac{1}{25}} \sqrt{5}$$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

№15

$$\text{Обчисліть значення виразу } \log_5 49 + 2 \log_5 \frac{5}{7}$$

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	4	25

№16

$$\text{Обчисліть } 400^{1-\log_{20} 4}$$

№17

$$\text{Обчисліть значення виразу } \frac{1}{70} \cdot 2^{3 \log_2 7}$$

№18

Якщо додатні числа x і y задовольняють умову $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$, то:

1. $\frac{x+y}{y} =$

2. $\log_2 x - \log_2 y =$

Відповідь надайте у вигляді двох чисел, розділених крапкою з комою.

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№19

Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$

№20

Обчисліть значення виразу $\log_a 500 - \log_a 4$, якщо $\log_5 a = \frac{1}{4}$

№21

Знайдіть значення виразу $6^{2 \log_6 9 - \log_6 4}$

№22

Обчисліть $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81$

№22

Обчисліть $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81$

№23

Обчисліть $\frac{1}{25} \cdot 9^{\log_3 \sqrt{14} + 0,5}$. Відповідь запишіть ДЕСЯТКОВИМ ДРОБОМ

№24

Обчисліть $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

Відповіді :

№1 А; №2 $\log_2 \frac{1}{8} < \log_2 \frac{1}{3} < \log_2 \frac{1}{2}$, $-3 < \log_2 \frac{1}{3} < -1$, Б;

№3 $\log_3 45 + \log_3 900 - \log_3 500 = \log_3 45 \cdot 900 : 500 = \log_3 81 = 4$, Б;

№4 $\log_2 8 < \log_2 9 < \log_2 16$, $3 < \log_2 9 < \log_2 4$, Г; №5 Б; №6 А; №7 Д;

№8 $\log_4 4 < \log_4 5 < \log_4 8$, $1 < \log_4 5 < 2$ А; №9 Г; №10 Д; №11 А; №12 А;

№13 $\log_5 1 < \log_5 4 < \log_5 5$, $0 < \log_2 9 < 1$, А; №14 Г; №15 Д; №16 Б;

№17

$$\log_a \sqrt{ab} = \log_a (ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_a ab = \frac{1}{2} \cdot (\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 7) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ Д;}$$

№18 $\log_{1/25} \sqrt{5} = \log_{5^{-2}} 5^{1/2} = -1/2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_5 5 = -1/4$ А; №19 Б;

$$\text{№20 } 400^{1-\log_{20} 4} = 400 \cdot 400^{-\log_{20} 4} = 400 \cdot 20^{2\log_{20} 4^{-1}} = 400 \cdot 20^{\log_{20} 4^{-2}} = 400 \cdot 4^{-2} =$$

$$= 400 \cdot \frac{1}{16} = 25$$

$$\text{№21 } \frac{x}{y} = \frac{1}{4},$$

$$1) \frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 0,25 + 1 = 1,25 \quad 2) \log_2 x - \log_2 y = \log_2 \frac{x}{y} = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

№22

$$\sqrt[2]{20^{2+\log_{20} 16}} = 20^{\frac{1}{2}(2+\log_{20} 16)} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{\frac{1}{2}}} = 20 \cdot 20^{\log_{20} 4} = 20 \cdot 4 = 80$$

№23

якщо $\log_5 a = 1/4$ то $\log_a 5 = 4$

$$\log_a 500 - \log_a 4 = \log_a \frac{500}{4} = \log_a 125 = \log_a 5^3 = 3\log_a 5 = 3 \cdot 4 = 12$$

№24

$$6^{2\log_6 9 - \log_6 4} = 6^{\log_6 81 - \log_6 4} = 6^{\log_6 \frac{81}{4}} = \frac{81}{4} = 20,25$$

№25

$$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81 = \frac{1}{\log_4 3} \cdot \log_4 5 \cdot \frac{1}{\log_5 7} \cdot \log_7 81 = \frac{\log_4 5}{\log_4 3} \cdot \frac{\log_7 81}{\log_7 5} = \log_3 5 \cdot \log_5 81 =$$

$$= \frac{1}{\log_5 3} \cdot \log_5 81 = \frac{\log_5 81}{\log_5 3} = \log_3 81 = 4$$

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№26

$$\begin{aligned}\frac{1}{25} \cdot 9^{\log_3 \sqrt{14} + 0,5} &= \frac{1}{25} \cdot 9^{\log_3 \sqrt{14}} \cdot 9^{\log_3 0,5} = \frac{1}{25} \cdot 3^{\log_3 (\sqrt{14})^2} \cdot 3^{\log_3 (0,5)^2} = \\ &= \frac{1}{25} \cdot 14 \cdot \frac{1}{4} = \frac{14}{100} = 0,14\end{aligned}$$

№27

$$\begin{aligned}\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 &= \frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 4 \cdot \frac{1}{\log_5 4} \cdot \log_5 6 \cdot \frac{1}{\log_7 6} \cdot \log_7 8 = \\ &= \frac{\log_3 4}{\log_3 2} \cdot \frac{\log_5 6}{\log_5 4} \cdot \frac{\log_7 8}{\log_7 6} = \log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8 = 2 \cdot \frac{1}{\log_6 4} \cdot \log_6 8 = 2 \cdot \frac{\log_6 8}{\log_6 4} = \\ &= 2 \cdot \log_4 8 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3\end{aligned}$$