

ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА

З ТЕМИ:

***"Тригонометричні формули.
Перетворення
тригонометричних виразів"***

Укладачі Пилипенко Вікторія Юріївна

Пилипенко Владислав Юрійович

Слов'янський заклад загальної середньої освіти І-ІІІ ступенів №10

Слов'янської міської ради Донецької області

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Тригонометричні формули

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО Й ТОГО САМОГО АРГУМЕНТУ

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha &= 1 & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} & \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} & \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned}$$

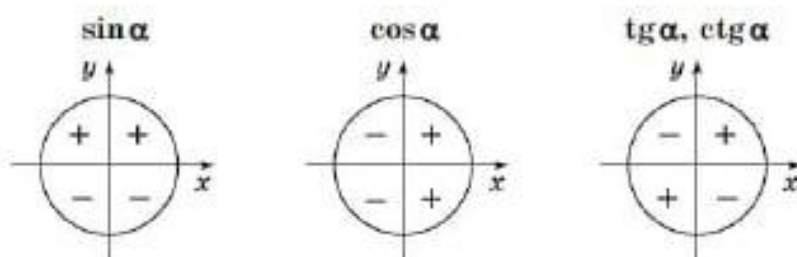
ФОРМУЛИ ПОДВІЙНОГО КУТА

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

Формули зведення

x	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos x$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Знаки тригонометричних функцій



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

1. Спростіть вираз: $tg^2\alpha(\sin^2\alpha - 1)$.

Розв'язання:

$$tg^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) = tg^2\alpha(-\cos^2\alpha) = -\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha = -\sin^2\alpha.$$

Відповідь: $-\sin^2\alpha$.

2. Спростіть вираз: $(\cos 6\alpha - 1)(\cos 6\alpha + 1)$.

Розв'язання:

$$(\cos 6\alpha - 1)(\cos 6\alpha + 1) = \cos^2 6\alpha - 1 = -\sin^2 6\alpha.$$

Відповідь: $-\sin^2 6\alpha$.

3. Спростіть вираз: $\frac{4}{\cos^2 2\alpha} - 4$.

Розв'язання: $\frac{4}{\cos^2 2\alpha} - 4 = \frac{4 - 4\cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \frac{4(1 - \cos^2 2\alpha)}{\cos^2 2\alpha} = \frac{4\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = 4tg^2 2\alpha.$

Відповідь: $4tg^2 2\alpha$.

4. Знайдіть значення виразу $\sin\alpha \cos\alpha$, якщо $\sin\alpha + \cos\alpha = -1,2$.

Розв'язання:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = -1,2;$$

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = (-1,2)^2;$$

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cos\alpha + \cos^2\alpha = 1,44;$$

$$1 + 2\sin\alpha \cos\alpha = 1,44;$$

$$2\sin\alpha \cos\alpha = 0,44;$$

$$\sin\alpha \cos\alpha = 0,44 : 2;$$

$$\sin\alpha \cos\alpha = 0,22.$$

Відповідь: 0,22.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

5. Спростіть вираз: $5 - \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$.

Розв'язання:

$$5 - \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha = 5 - (\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha) = 5 - 1 = 4.$$

Відповідь: 4.

6. Спростіть вираз: $(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2 + (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)^2$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} (\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2 + (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)^2 &= \sin^2 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \\ &+ \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 2(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

7. Спростіть вираз: а) $\cos 3\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha$; б) $\sin 7^\circ \cos 53^\circ + \sin 53^\circ \cos 7^\circ$.

Розв'язання:

$$\text{а) } \cos \alpha \cos 3\alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos(\alpha - 3\alpha) = \cos(-2\alpha) = \cos 2\alpha;$$

$$\text{б) } \sin 7^\circ \cos 53^\circ + \sin 53^\circ \cos 7^\circ = \sin(7^\circ + 53^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: а) $\cos 2\alpha$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу $\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha$.

Розв'язання:

$$\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{6} \sin \alpha \right) =$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) = 2 \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right).$$

$$-1 \leq \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1;$$

$$-1 \cdot 2 \leq 2 \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1 \cdot 2;$$

$$-2 \leq 2 \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \leq 2;$$

$$-2 \leq \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha \leq 2.$$

Відповідь: найменше значення даного виразу -2 і найбільше значення даного виразу 2 .

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

9. Спростіть вирази: а) $\frac{\sin 8\alpha}{\sin 4\alpha}$; б) $\frac{\cos 6\alpha}{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha}$; в) $\sin 5\alpha \cos 5\alpha \cos 10\alpha$;
г) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha}$; д) $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}$.

Розв'язання:

$$\text{а) } \frac{\sin 8\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = 2 \cos 4\alpha;$$

$$\text{б) } \frac{\cos 6\alpha}{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha} = \frac{\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha}{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha} = \frac{(\cos 3\alpha - \sin 3\alpha)(\cos 3\alpha + \sin 3\alpha)}{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha} = \cos 3\alpha + \sin 3\alpha;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \sin 5\alpha \cos 5\alpha \cos 10\alpha &= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 5\alpha \cos 5\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 5\alpha) \cos 10\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \sin 10\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 10\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{4} \sin 20\alpha; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha;$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \frac{\sin 4\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} &= \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha \cdot 1} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \\ &= 2 \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $2 \cos 4\alpha$; б) $\cos 3\alpha + \sin 3\alpha$; в) $\frac{1}{4} \sin 20\alpha$; г) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha$; д) $2 \sin 2\alpha$.

10. Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = -0,6$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Розв'язання:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi; \cos \alpha > 0; \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (-0,6)^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

$$\cos 2\alpha = 0,8^2 - (-0,6)^2 = 0,64 - 0,36 = 0,28.$$

Відповідь: 0,28.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

11. Доведіть тотожність: $\frac{\sin(\pi - \alpha) \sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = -\cos \alpha$.

Доведення:

$$\frac{\sin(\pi - \alpha) \sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cdot (-\sin \alpha)} = -\frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = -\cos \alpha.$$

$$-\cos \alpha = -\cos \alpha.$$

12. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 189^\circ \cdot \operatorname{ctg} 171^\circ$; 2) $\sin 136^\circ - \sin 44^\circ$; 3) $\cos 125^\circ + \cos(-55^\circ)$.

Розв'язання:

$$1) \operatorname{tg} 189^\circ \cdot \operatorname{ctg} 171^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 9^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(180^\circ - 9^\circ) = \operatorname{tg} 9^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 9^\circ) = -1.$$

$$2) \sin 136^\circ - \sin 44^\circ = \sin(180^\circ - 44^\circ) - \sin 44^\circ = \sin 44^\circ - \sin 44^\circ = 0.$$

$$3) \cos 125^\circ + \cos(-55^\circ) = \cos(180^\circ - 55^\circ) + \cos 55^\circ = -\cos 55^\circ + \cos 55^\circ = 0.$$

13. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sin(-930^\circ) + \sqrt{3} \cos(-210^\circ) + \operatorname{tg} 675^\circ;$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{15\pi}{4} + 2 \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right).$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} 1) \sin(-930^\circ) + \sqrt{3} \cos(-210^\circ) + \operatorname{tg} 675^\circ &= -\sin 930^\circ + \sqrt{3} \cos 210^\circ + \\ &+ \operatorname{tg} 675^\circ = -\sin(360^\circ \cdot 3 - 150^\circ) + \sqrt{3} \cos(180^\circ + 30^\circ) + \operatorname{tg}(360^\circ \cdot 2 - 45^\circ) = \\ &= -(-\sin 150^\circ) + \sqrt{3} (-\cos 30^\circ) + \operatorname{tg}(-45^\circ) = \sin 30^\circ + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \\ &- 1 = -1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \operatorname{tg} \frac{15\pi}{4} + 2 \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right) &= \operatorname{tg}\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot \left(-\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) - \\ &- 2 \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{6} = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + 1 - \\ &- \sqrt{3} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

14. Відомо, що $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Знайдіть $\cos \alpha$, $\sin 2\alpha$.

Розв'язання:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2;$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{9}{16};$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{25}{16};$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}; \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right); \cos \alpha < 0, \sin \alpha < 0;$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5};$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}.$$

Відповідь: 1) $-\frac{4}{5}$; 2) $\frac{24}{25}$.



ВІДЕО БЛОК



**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

Варіант 1

У завданнях 1 – 6 виберіть ОДНУ правильну відповідь.

1. Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює 72° .

А	Б	В	Г
$\frac{\pi}{72}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$

2. Укажіть правильну нерівність, якщо $a = \sin 100^\circ$, $b = \cos 100^\circ$.

А	Б	В	Г
$0 < a < b$	$a < 0 < b$	$a < b < 0$	$b < 0 < a$

3. Спростіть вираз: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)$.

А	Б	В	Г
0	$2\sin\alpha$	$\cos\alpha + \sin\alpha$	$\sin\alpha - \cos\alpha$

4. Спростіть вираз: $5,4 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

А	Б	В	Г
5,4	4,4	0	6,4

5. Знайдіть значення виразу: $5\sin(-30^\circ) - 2\operatorname{tg}(-45^\circ) - \cos(-60^\circ)$.

А	Б	В	Г
-1	-2	0	1

6. Знайдіть значення виразу: $\cos 18^\circ \cos 108^\circ + \sin 18^\circ \sin 108^\circ$.

А	Б	В	Г
1	не існує	0	-1

7. Установіть відповідність між виразом (1 – 3) та його числовим значенням (А – Д).

	Вираз		Числове значення
1.	$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	А	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
2.	$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	Б	$-\sqrt{3}$
3.	$\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	В	$-\frac{1}{2}$
		Г	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
		Д	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

8. Дано: $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Знайдіть: $\sin 2\alpha$.
9. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу: $2\cos^2 \alpha - 3\sin \alpha$.
10. Спростіть вираз: $\cos 25^\circ + \cos 35^\circ + \dots + \cos 145^\circ + \cos 155^\circ$.

Варіант 2

У завданнях 1 – 6 виберіть ОДНУ правильну відповідь.

1. Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює 54° .

А	Б	В	Г
$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{54}$	$\frac{\pi}{10}$

2. Укажіть правильну нерівність, якщо $a = \sin 300^\circ$, $b = \cos 300^\circ$.

А	Б	В	Г
$a < 0 < b$	$a < b < 0$	$b < 0 < a$	$0 < b < a$

3. Спростіть вираз: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)$.

А	Б	В	Г
$-2\cos \alpha$	0	$-2\sin \alpha$	$\sin \alpha + \cos \alpha$

4. Спростіть вираз: $4,3 - \sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha$.

А	Б	В	Г
3	4,3	0	3,3

5. Знайдіть значення виразу: $4\sin(-60^\circ) - 3\operatorname{tg}(-30^\circ) + 6\cos(-30^\circ)$.

А	Б	В	Г
$-\sqrt{3}$	2	$2\sqrt{3}$	-2

6. Знайдіть значення виразу: $\sin 126^\circ \cos 36^\circ - \sin 36^\circ \cos 126^\circ$.

А	Б	В	Г
0	1	-1	не існує



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

7. Установіть відповідність між виразом (1 – 3) та його числовим значенням (А – Д).

	Вираз		Числове значення
1.	$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$	А	$\sqrt{3}$
2.	$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$	Б	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3.	$\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$	В	$-\sqrt{3}$
		Г	$-\frac{1}{2}$
		Д	$\frac{1}{2}$

8. Дано: $\cos\alpha = 0,6$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Знайдіть: $\cos 2\alpha$.

9. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу: $4\sin^2\alpha - 5\cos\alpha$.

10. Спростіть вираз: $\cos 40^\circ + \cos 50^\circ + \dots + \cos 130^\circ + \cos 140^\circ$.

ВІДПОВІДІ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В1	В	Г	Б	Б	А	В	В Д Г	$\frac{120}{169}$	5; -3	0
В2	А	А	В	Г	В	Б	Б Г А	-0,28	9; -5	0