

ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА
З ТЕМИ:
«Числові множини.
Подільність чисел»

Укладач: Калашник Юлія Юріївна
Навчально-виховний комплекс
«Загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №7 –
дошкільний навчальний заклад»
Добропільської міської ради Донецької
області

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Цифри, числа та їх види

Почнемо з початку: в чому різниця між цифрою і числом?

Цифр є всього 10: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**. Це просто знаки. З таких знаків-цифр складаються **числа**.

Розряди чисел: місце кожної цифри в числі означає певний розряд. Кожні три розряди (рахуючи справа наліво) утворюють клас.

Покажемо розряди та класи на прикладі кількох чисел:

	Клас мільярдів			Клас мільйонів			Клас тисяч			Клас одиниць		
	сотні мільярдів	десятки мільярдів	одиниці мільярдів	сотні мільйонів	десятки мільйонів	одиниці мільйонів	сотні тисяч	десятки тисяч	одиниці тисяч	сотні	десятки	одиниці
325 547 548 968	3	2	5	5	4	7	5	4	8	9	6	8
8 125 498 673			8	1	2	5	4	9	8	6	7	3
125										1	2	5
100 003							1	0	0	0	0	3

Для зручності читання чисел класи в них розділяють.

- В Україні пробілами: 325 547 548 968
- В англomовних країнах між розрядами ставлять точку: 325.547.548.968 (в українській мові в математиці використовують слово «точка», а не «крапка»)

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Кожне число можна розкласти за розрядами.

Подібний розклад іноді зустрічається в завданнях ЗНО. Наприклад, ми знаємо, що в числі 321 є 3 сотні, 2 десятки і 1 одиниця, тому

$$321 = 300 + 20 + 1 = 3 * 100 + 2 * 10 + 1.$$

Це називається розклад числа на розрядні доданки.

Іноді в завданнях не всі цифри числа відомі. Таке число записується під рискою ($\overline{abc}$). Це означає, що в числі є a сотень, b десятків і c одиниць.

В таких випадках часто слід розкласти число у вигляді суми розрядних доданків: $\overline{abc} = a * 100 + b * 10 + c$; $\overline{5b} = 5 * 10 + b$

Числа поділяються на:

- **Натуральні:**

1, 2, 3, 4, 5 ...

Їх нескінченна кількість. Використовуються для позначення кількості предметів і при лічбі.

Всі натуральні числа, записані підряд утворюють натуральний ряд чисел: 1, 2, 3, 4, ...

Вся множина натуральних чисел позначається буквою $\mathbb{N}$.

0 не є натуральним числом.

- **Цілі числа:**

- всі натуральні (1, 2, 3, 4, 5 ...),

- протилежні їм (-1, -2, -3, -4, -5...)

- число 0.

Вся множина цілих чисел позначається буквою $\mathbb{Z}$.

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

• Раціональні числа:

- всі цілі ($-125, 0, 1578, 2$),
- всі звичайні дроби ($\frac{5}{9}, -\frac{125}{4}, 2\frac{1}{2}$),
- скінченні десяткові дроби (тобто такі, які можна записати до кінця: $3,12; 0,125789$)
- всі нескінченні періодичні десяткові дроби (наприклад: $0,(3)=0,33333...; 25,12(45)=25,12454545...$).

Всі такі числа можна представити у вигляді звичайного дроби $\frac{m}{n}$, де чисельник і знаменник – цілі числа.

Вся множина раціональних чисел позначається буквою $\mathbb{Q}$.

• Ірраціональні числа – це нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Їх не можна представити у вигляді звичайного дроби.

- Необчислювані корені (тобто ті, що не можна обрахувати, позбувшись знаку кореня)

$$\sqrt{2} = 1,41421356237 \dots$$

- числа $\pi; e$

$$\pi = 3,14159265359 \dots$$

$$e = 2,71828182846 \dots$$

- більшість значень тригонометричних функцій

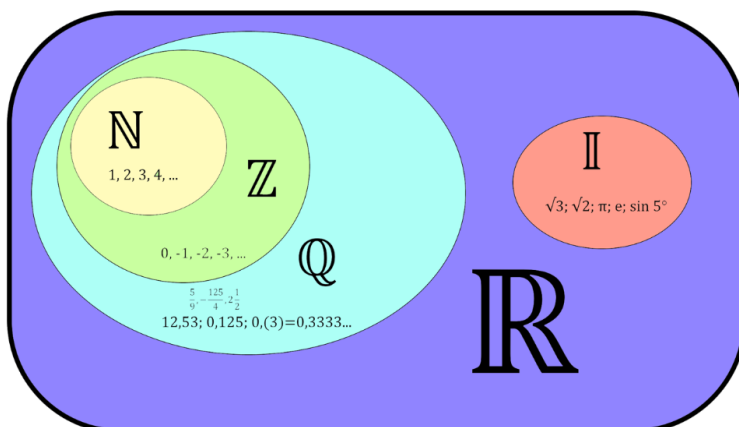
$$\sin 5^\circ = 0,0871557427 \dots; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Проте, наприклад, $\sin 90^\circ = 1$, тому це раціональне число.

Вся множина ірраціональних чисел позначається буквою $\mathbb{I}$.

Дійсні числа – всі раціональні та ірраціональні числа. Кожне дійсне число можна представити у вигляді точки на числовій осі. Вся множина дійсних чисел позначається буквою $\mathbb{R}$.

Всі види чисел зручно представляти у вигляді діаграм Ейлера:



ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Всі **цілі числа** ($\mathbb{Z}$) поділяються на парні та непарні.

- Парними є ті, що закінчуються на парну цифру (0; 2; 4; 6; 8).

Число 0 також є парним числом.

Всю множину парних чисел можна представити у вигляді

$$2n; n \in \mathbb{Z}$$

- Непарні закінчуються на непарну цифру (1; 3; 5; 7; 9).

Всю множину непарних чисел можна представити у вигляді

$$2n + 1; n \in \mathbb{Z}$$

Натуральні числа ($\mathbb{N}$) бувають простими та складеними:

- Просте число** ділиться націло тільки на себе та на 1, тобто має лише два дільники. Наприклад, 19 можна поділити лише на 19 та 1, тому це просте число.

Прості числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, ...

- Складене число** має більше двох дільників, тобто ділиться на щось ще окрім одиниці і самого себе.
Наприклад, число 12 може ділитись на 1, 2, 3, 4, 6, 12, тому воно є складеним.
- Число 1 не є ні простим, ні складеним.

НСК, НСД

Розкласти число на прості множники – означає записати його у вигляді добутку простих чисел.

Наприклад, $6 = 2 \cdot 3$; $16 = 2^4$; $1056 = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$.

Як розкласти число на прості множники:



VI. В кінці записуємо результат розкладання на множники:

$$1056 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Взаємно простими числами називають такі, які не мають спільних дільників, окрім 1.

Наприклад, $8 = 2^3$; та $9 = 3^2$ не мають жодного спільного дільника, тому вони взаємно прості.

Найбільший спільний дільник (НСД): найбільше число, НА яке можна поділити дані числа.

Щоб знайти НСД, потрібно перемножити спільні прості множники в даних числах. При цьому кількість має значення.

I. Розкладаємо числа на прості множники

II. Обводимо однакові прості множники.

Кількість має значення, тому ми обвели всього одну двійку (в 120 є аж три двійки, але в 54 тільки одна) і одну трійку.

120	2
60	2
30	2
15	5
3	3
1	

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$\text{НСД}(120; 54) = 2 \times 3 = 6$$

III. Обведені множники в одному з чисел перемножаємо. Це і буде наш НСД

Найменше спільне кратне (НСК): найменше число, яке можна поділити на кожне з даних чисел.

Щоб знайти НСК, потрібно перемножити одне з чисел на ті прості множники, яких немає в даному, але які є в інших числах.

I. Розкладаємо числа на прості множники

120	2
60	2
30	2
15	5
3	3
1	

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

II. Під множниками будь-якого з чисел ставимо риску і дописуємо під нею ті множники, які є в іншому числі, але яких немає в нашому.

В даному випадку ми дописали дві трійки, адже в 54 є три трійки, а в 120 лише одна.
(Якби ми ставили риску під 54, то дописали б п'ятірку та дві двійки)

$$\text{НСК}(120; 54) = (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3) \times (3 \times 3) = 120 \times 9 = 1080$$

III. Перемножаємо всі множники над ризкою і під ризкою. Це і буде наше НСК.

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Якщо два числа a і b взаємно прості, то їх $\text{НСД}(a; b) = 1$, адже немає спільних множників. НСК таких чисел дорівнює їх добутку: $\text{НСК}(a; b) = a * b$, адже доведеться дописувати всі множники з іншого числа, бо вони не повторюються.

Ділення з остачею

Якщо ми хочемо поділити 20 на 6, ми можемо записати результат у вигляді дроби, або залишити остачу: $20 : 6 = 3$ (і остача 2).

В такому випадку 20 – ділене, 6 – дільник, 3 – неповна частка, 2 – остача.

Остача завжди менша за дільник.

Щоб повернутися назад до діленого, слід неповну частку (3) помножити на дільник (6) і додати остачу (2): $3 * 6 + 2 = 20$

При діленні в стовпчик **остачею** буде **останнє число, що не ділиться на дільник**, а **неповною часткою** – **результат ділення на цей момент**:
Наприклад $185 : 7 = 26$ (ост. 3)

$$\begin{array}{r} 185 \\ - 14 \\ \hline 45 \\ - 42 \\ \hline 3 \end{array} \bigg| 7$$

Подільність чисел

Іноді потрібно перед дією побачити, на які числа може ділитися дане **ціле** число без остачі.

Така ситуація виникає при скороченні, пошуку спільного знаменника, розкладанні числа на прості множники тощо.

Отже ознаки подільності:

- **На 2:** число ділиться на 2, якщо воно є парним, тобто закінчується на парну цифру (0; 2; 4; 6; 8).
- **На 3:** число ділиться на 3, якщо сума всіх цифр числа ділиться на 3.
Наприклад, число 578961: $5 + 7 + 8 + 9 + 6 + 1 = 36$, а 36 ділиться на 3, тому і все число 578961 теж ділиться на 3 без остачі.
- **На 5:** число ділиться на 5, якщо закінчується на цифру 0 або 5.

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

- **На 9:** число ділиться на 9, якщо сума всіх цифр числа ділиться на 9 (аналогія з ознакою подільності на 3). Також очевидно, що будь-яке число, що ділиться на 9, ділиться також і на 3 без остачі.
- **На 10:** число ділиться на 10, якщо закінчується на цифру 0.

Використовуючи ці властивості можна перевірити подільність і на інші числа:

- щоб число ділилося на 6 ($2 \cdot 3$) воно має ділитися одночасно на 2 і на 3, тобто закінчуватись парною цифрою і сума цифр має ділитись на 3;
- щоб число ділилося на 15 ($5 \cdot 3$) воно має ділитися одночасно на 5 і на 3, тобто закінчуватись на 0 або 5 і сума цифр має ділитись на 3.

Модуль

Модулем або абсолютною величиною даного числа називають «невід'ємну версію» цього числа ($|-5| = 5$; $|3| = 3$)

Тобто, якщо число і було невід'ємним, то модуль нічого не змінює; а якщо число було від'ємним, то модуль робить його протилежним (тобто додатним).

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0 \\ -a, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}$$

Модулі **протилежних чисел** рівні: $|-13| = 13 = |13|$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Алгоритм розкриття модуля:

- 1) Перетворюємо модуль на дужки, в дужках залишається той самий вираз, що був під модулем.
- 2) Перед дужками:
 - а. ставимо мінус, якщо значення виразу в дужках (модулі) від'ємне;
 - б. не ставимо нічого, якщо значення виразу нульове або додатне (себто невід'ємне).

$$|-8| = -(-8) = 8$$

Цей алгоритм здається непотрібним, коли мова йде про одиночні числа під модулем. Ну і їжаку ж зрозуміло, що $|-8| = 8$, навіщо всі ці дужки, додаткові мінуси, запитаєте ви. Цей алгоритм з дужками дуже потрібний, коли мова заходить про буквені вирази, або навіть многочлени під модулем.

- Відомо, що x – від'ємне число. Знайти $|2x|$.
 $|2x| = -(2x) = -2x$;
поставили додатковий мінус, адже $2x < 0$
- $|4 - \sqrt{1000}|$
Очевидно, що 4 менше за $\sqrt{1000}$, тому вираз $4 - \sqrt{1000} < 0$ – від'ємний.
 $|4 - \sqrt{1000}| = -(4 - \sqrt{1000}) = -4 + \sqrt{1000} = \sqrt{1000} - 4$
- $|\pi - 3|$
 $\pi = 3,14 \dots$, тому вираз $\pi - 3 > 0$ – додатний
 $|\pi - 3| = (\pi - 3) = \pi - 3$
Перед дужками не поставили мінуса, адже під модулем був додатний вираз.
- $|\pi - 5|$
 $\pi = 3,14 \dots$, тому вираз $\pi - 5 < 0$
 $|\pi - 5| = -(\pi - 5) = -\pi + 5 = 5 - \pi$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

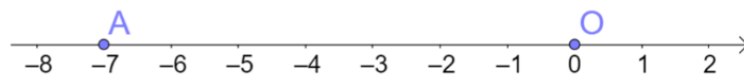
$$\begin{aligned} \circ \quad |\pi - 3| + |\pi - 4| &= (\pi - 3) + (-(\pi - 4)) = \\ &= \pi - 3 + (-\pi + 4) = \pi - 3 - \pi + 4 = 1 \end{aligned}$$

Поставили **мінус** і **додаткові дужки**, щоб два знаки не йшли підряд.

$$\begin{aligned} \circ \quad |\pi - 3| - |\pi - 4| &= (\pi - 3) - (-(\pi - 4)) = \\ &= \pi - 3 - (-\pi + 4) = \pi - 3 + \pi - 4 = 2\pi - 7 \end{aligned}$$

Геометрично на числовій прямій модуль числа дорівнює відстані від цього числа до початку координат.

$$|-7| = AO = 7$$



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Укажіть хибне твердження.

- ☐ - 3 - раціональне число
- ☐ - 3 - недодатне число
- ☒ - 3 - невід'ємне число
- ☐ - 3 - ціле число

Яке з чисел не має оберненого?

- ☐ 3,6
- ☐ -1
- ☒ 0
- ☐ 1

Для подарунків придбали 96 шоколадок, 72 апельсини і 84 банани. Яку найбільшу кількість однакових подарунків можна з них скласти, використавши всі ці продукти?

- ☒ 12
- ☐ 14
- ☐ 8
- ☐ 16

Укажіть серед даних чисел складене.

- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 1
- ☒ 4

Визначте пару взаємно простих чисел

- ☒ 14 і 27
- ☐ 7 і 14
- ☐ 14 і 16
- ☐ 14 і 35



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

У ящику лежить певна кількість яблук. Виявилося, що їх можна розкласти у 5 однакових рядів, або у 8 однакових рядів, або у 12 однакових рядів. Яка найменша кількість яблук може бути в ящику?

- ☐ 480 яблук
- ☐ 60 яблук
- ☐ 240 яблук
- ☒ 120 яблук

Яке з чисел має найменший модуль?

- ☒ 0
- ☐ -6
- ☐ -2
- ☐ 4

Укажіть пару чисел, які не є взаємно простими.

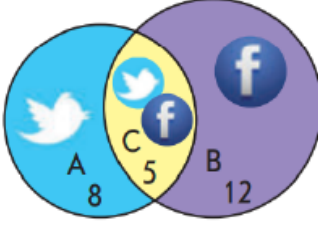
- ☐ 15 і 14
- ☐ 36 і 55
- ☒ 52 і 65
- ☐ 3 і 7

Укажіть число, яке ділиться націло на 3.

- ☐ 613
- ☐ 311
- ☐ 517
- ☐ 119
- ☒ 975

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

У класі 25 учнів. Серед них 13 учнів користуються соціальною мережею Twitter, а 17 учнів — мережею Facebook. Визначте, скільки учнів класу є користувачами обох соціальних мереж.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Скористаємося діаграмою Ейлера — Венна: • користувачі мережі Twitter (13 осіб) — жовта й блакитна ділянки; • користувачі мережі Facebook (17 осіб) — жовта й фіолетова ділянки; • користувачі лише Twitter — блакитна ділянка, • користувачі лише Facebook — фіолетова ділянка.	• користувачі Twitter ($A+C$): $A+C=13$; • користувачі Facebook ($B+C$): $B+C=17$; • користувачі лише Twitter (A); • користувачі лише Facebook (B)
КРОК 2	Оскільки всього в класі 25 учнів, то кількість учнів, які користуються: 1) лише Facebook (B), становить: $B = (A+B+C) - (A+C)$; 2) обома мережами — і Facebook, і Twitter (C), становить: $C = (B+C) - B$. Слід зазначити, що розв’язання можна було почати зі знаходження кількості учнів, які є користувачами лише мережі Twitter: 1) лише Twitter (A): $A = (A+B+C) - (B+C)$; 2) обох мереж — і Facebook, і Twitter (C): $C = (A+C) - A$.	$A+B+C=25$; 1) $25-13=12$ (учнів); 2) $17-12=5$ (учнів).  1) $25-17=8$ (учнів); 2) $13-8=5$ (учнів)

Відповідь: 5 учнів.

ВІДЕО БЛОК



**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК



**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

