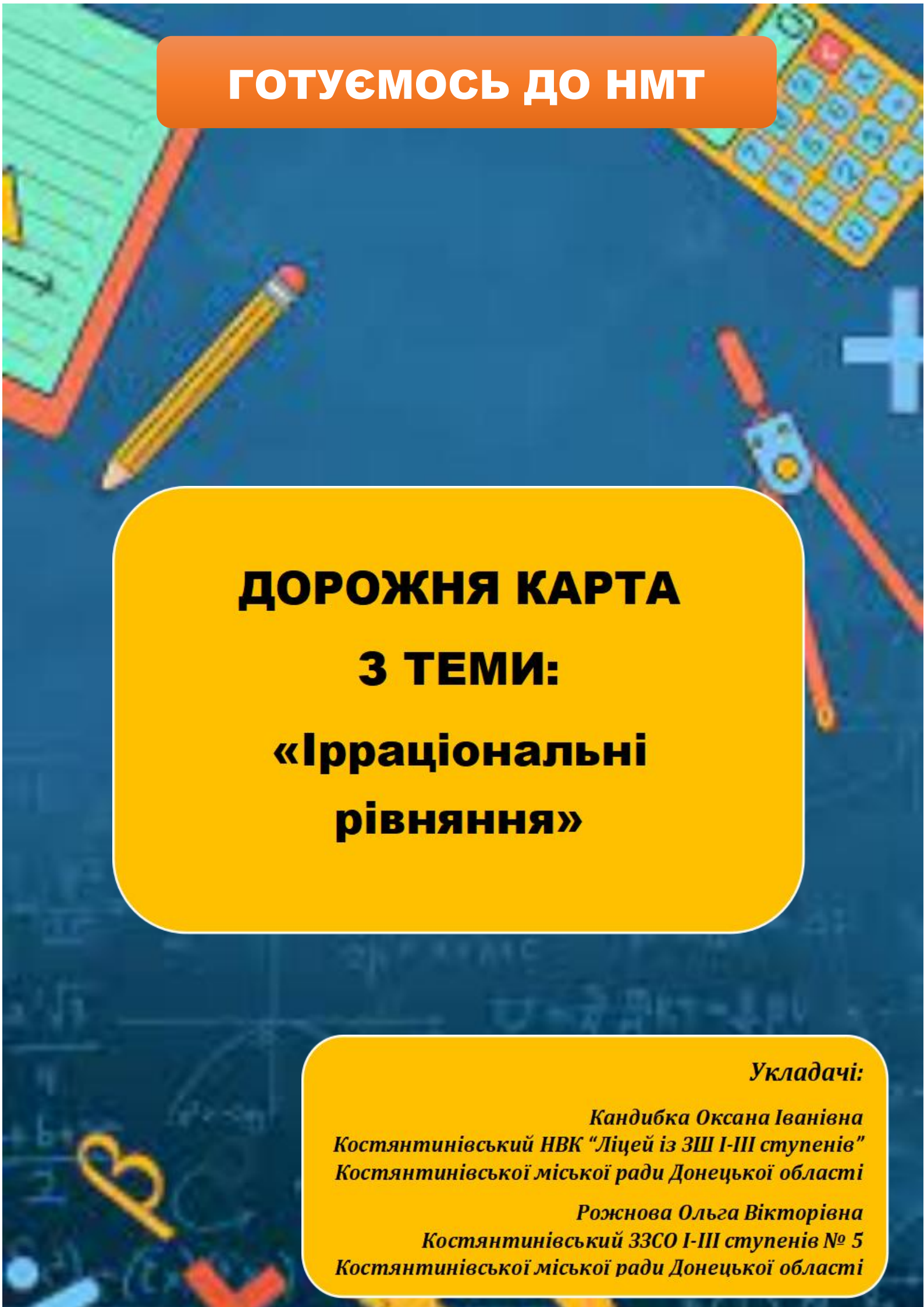




ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА
З ТЕМИ:
«Ірраціональні
рівняння»

Укладачі:

*Кандибка Оксана Іванівна
Костянтинівський НВК "Ліцей із ЗШ I-III ступенів"
Костянтинівської міської ради Донецької області*

*Рожнова Ольга Вікторівна
Костянтинівський ЗЗСО I-III ступенів № 5
Костянтинівської міської ради Донецької області*

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Ірраціональні рівняння

Рівняння, у яких змінна знаходиться під знаком кореня або в основі степеня з дробовим показником, називаються **ірраціональними рівняннями**.

Рівняння виду $\sqrt[n]{f(x)} = 0$ називаються найпростішими ірраціональними.

$a \geq 0$	$a < 0$	
$\swarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$
$f(x) = a^{2n}$	Коренів немає	$f(x) = a^{2n+1}$



THEORY

Ірраціональні рівняння

Основні способи розв'язання

ірраціональних рівнянь:

- ☐ за допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня і звільнення від радикалів;
- ☐ за допомогою заміни змінних;
- ☐ за допомогою застосування властивостей функцій;
- ☐ Метод розкладання на множники.



ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Ірраціональні рівняння

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь, які містять **корені парного степеня** треба пам'ятати, що значення таких коренів **не можуть бути від'ємними**.

$\sqrt[4]{x^2 + 2} = -4$	$\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = -1$	$\sqrt{x-2} = 2-x$
Підкореневий вираз в парному степені завжди додатне число	Сума коренів в парному степені завжди додатне число	Значення кореня 2-х повинно бути невід'ємне як і підкореневий вираз
$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$	$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$
	$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$	



THEORY

Ірраціональні рівняння

Спосіб 1. Піднесення обох частин рівняння до одного степеня

Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного.



ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Ірраціональні рівняння

Спосіб 2. Заміна змінної

$$\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6$$

Нехай $\sqrt[4]{x^3 + 8} = t$, отже $\sqrt{x^3 + 8} = t^2$, де $t \geq 0$

$$\text{Маємо } t^2 + t - 6 = 0$$

$$t_1 = -3 \text{ (сторонній корінь); } t_2 = 2$$

Повернемось до заміни

$\sqrt[4]{x^3 + 8} = 2$, Піднесемо до четвертого степеня обидві частини рівняння

$$x^3 + 8 = 16; \quad x^3 = 8; \quad x = 2.$$



THEORY

Ірраціональні рівняння

Спосіб 3. Розкладання на множники

Метод розкладання на множники полягає в розкладанні всіх доданків рівняння на множники, прирівнявши їх до нуля. Потім, знайшовши ОДЗ, маємо розв'язати сукупність множників як окремого рівняння.

$$x^2 \sqrt{x+6} - 49 \sqrt{x+6} = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x + 6 \geq 0; \\ x \geq -6$$

$$\sqrt{x+6}(x^2 - 49) = 0$$

$$\sqrt{x+6} = 0 \text{ або } x^2 - 49 = 0$$

$$x_1 = -6, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = -7 \text{ - сторонній корінь}$$



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Ірраціональні рівняння

П
р
и
к
л
а
д

$$\sqrt[7]{x^2 - 2} = \sqrt[7]{x}$$

Піднесемо обидві частини рівняння до сьомого степеня

$$(\sqrt[7]{x^2 - 2})^7 = (\sqrt[7]{x})^7$$

$$x^2 - 2 = x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = 2$$



THEORY

Ірраціональні рівняння

П
р
и
к
л
а
д

Розв'язати рівняння: $x - 5\sqrt{x - 2} + 4 = 0$

Розв'язування :

$$x - 5\sqrt{x - 2} + 4 = 0$$

$$x + 4 = 5\sqrt{x - 2} \quad \text{Піднесемо до другого степеня}$$

$$x^2 + 8x + 16 = 25x - 50,$$

$$x^2 - 17x + 66 = 0,$$

$$x_1 = 11,$$

$$x_2 = 6.$$

Відповідь: 6; 11.



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад 1. $\sqrt{x-1} = 4$.

Підносимо ліву і праву частину до квадрата, враховуючи, що $x-1 \geq 0$.

$$\begin{cases} (\sqrt{x-1})^2 = 4^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x-1=16 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad x=17.$$

Оскільки корінь парного степеня набуває тільки додатних значень, то це часто додає обмеження не тільки на підкореневі вирази, а й на праву частину рівняння.

Приклад 2. $\sqrt{x+5} = 7-x$.

Ліва частина рівняння набуває додатних значень, тому й права повинна набувати додатних:

$$\sqrt{x+5} = 7-x \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = (7-x)^2 \\ 7-x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = x^2 - 14x + 49 \\ x \leq 7 \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 15x + 44 = 0 \\ x \leq 7 \\ x \geq -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=11 \\ x \leq 7 \\ x \geq -5 \end{cases} \quad \text{Корінь } x=11 \text{ – сторонній, оскільки права частина початкового рівняння}$$

при $x=11$ – від'ємна.

Відповідь: $x=4$.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} &= x-1 \\ (\sqrt{x+1})^2 &= (x-1)^2 \\ x+1 &= x^2-2x+1 \\ x^2-2x-x+1-1 &= 0 \\ x^2-3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x=0 \text{ або } x-3 &= 0 \\ x &= 3\end{aligned}$$

Перевірка:

Підставляти слід отримане значення змінної до початкового рівняння (до піднесення обох його частин до степеня):

$$x=0$$

$$\sqrt{0+1}=0-1$$

$$\sqrt{1}=-1 \text{ - це неправильна рівність, тому що арифметичний корінь парного степеня не може дорівнювати від'ємному числу.}$$

Отже, $x=0$ – сторонній корінь.

$$x=3$$

$$\sqrt{3+1}=3-1$$

$$\sqrt{4}=2$$

$$2=2 \text{ - це правильна рівність.}$$

Отже, дане рівняння має один корінь $x=3$.

Метод піднесення до квадрату обох частин рівняння

$$\sqrt{2x+1}=3$$

$$2x+1=3^2$$

$$2x+1=9$$

$$2x=8$$

$$x=4$$

Відповідь: $x=4$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

$$2x + \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \geq 0$$

Виконуємо заміну:

$$\sqrt{x} = t \geq 0,$$

$$x = t^2$$

$$t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$t_1 = -6, t_2 = 1$$

-6 – сторонній корінь

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1$$

Перевірка:

$$2 \cdot 1 + \sqrt{1} - 3 = 0$$

Відповідь: 1



THEORY

$$1) \sqrt{x+2} = 3$$

$$\text{ОДЗ: } x \geq -2$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = 3^2$$

$$x+2 = 9$$

$$x = 7$$

Перевірка:

$$\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$$

$$2) \sqrt{6+5x^2} = 2$$

$$(\sqrt{6+5x^2})^2 = 2^2$$

$$6+5x^2 = 4$$

$$x^2 = -\frac{2}{3}$$

Відповідь: Коренів немає

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

$$1) \sqrt{2x+3} = 6-x$$

$$\begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 2x+3 = (6-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ 2x+3 = 36-12x+x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ x^2-14x+33=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ x=3; x=11 \end{cases} \quad x=3$$

$$\text{Перевірка: } \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 6 - 3$$

Відповідь: 3.



THEORY

$$2) \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1} = 1$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x+1 \geq 0; \\ x+1 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -0,5 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$x \geq -0,5$$

Виконуємо рівносильні перетворення даного рівняння.

$$\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{x+1}$$

Підносимо обидві частини рівняння до квадрату.

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (1 + \sqrt{x+1})^2$$

$$2x+1 = 1 + 2\sqrt{x+1} + x+1$$

$$x-1 = 2\sqrt{x+1}$$

Для всіх коренів рівняння $x-1 \geq 0$.

$$(x-1)^2 = (2\sqrt{x+1})^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4(x+1)$$

$$x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 48$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

$x_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ - входить до ОДЗ, задовольняє умову $x-1 \geq 0$

$x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$ - входить до ОДЗ, але не задовольняє умову $x-1 \geq 0$

Відповідь: $3 + 2\sqrt{3}$

ВІДЕО БЛОК



**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК



**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt[3]{x-3} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$(0; 8]$	$(8; 12]$	$(12; 15]$	$(15; +\infty)$

Укажіть рівняння, коренем якого є число 64.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{x} = -2$	$\sqrt[3]{x} = 2$	$\sqrt[3]{x} = 4$	$\sqrt{x} = -8$	$\sqrt[3]{x} = -4$

Укажіть множину коренів рівняння $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{2x-1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	0	2	-2	0; 2

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
16 або -16	$\sqrt[3]{2}$	-16	16	8

Укажіть рівняння, яке не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{x} = 0$	$\sqrt[3]{x-1} = 1$	$\sqrt[3]{x+1} = 1$	$\sqrt[3]{x-1} = -1$	$\sqrt[3]{x-1} = -1$

Скільки коренів має рівняння $2\sqrt{x^2+81} = 6$?

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

Установіть відповідність між рівнянням (1-4) та його коренем (А-Д).

Рівняння	Корінь рівняння
1 $\sqrt{x-1} = 3$	А 6
2 $\sqrt[3]{x} = 2$	Б 7
3 $\sqrt[4]{x+7} = 2$	В 8
4 $\sqrt[3]{x-8} = -1$	Г 9
	Д 10

Установіть відповідність між рівнянням (1-4) та його коренем (А-Д).

Рівняння	Корінь рівняння
1 $\sqrt{x-4} = 2$	А 2
2 $\sqrt[3]{x+17} = 3$	Б 4
3 $\sqrt[4]{x-6} = 0$	В 6
4 $\sqrt[5]{x-34} = -2$	Г 8
	Д 10

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+3}$. Якщо рівняння має кілька коренів, у відповідь запишіть їх добуток.

10. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 5$. Якщо воно має кілька коренів, у відповідь запишіть їх суму.

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

11. Для рівняння $(x - 2a)\sqrt{x^2 + 4x - 12} = 0$, де a – параметр, укажіть:
Найбільше значення a , при якому рівняння має тільки два корені.
12. Для рівняння $(x - 2a)\sqrt{x^2 + 4x - 12} = 0$, де a – параметр, укажіть:
Найбільше ціле від'ємне значення a , при якому рівняння має тільки три корені.
13. Знайдіть найбільше ціле значення параметра a , при якому рівняння $(a^2 - 9)\sqrt[5]{x - 1} = a - 3$ не має розв'язків.
14. При якому найменшому натуральному значенні параметра a рівняння $(a^2 - 16)\sqrt[5]{x} = a + 4$ має розв'язки?

Відповіді:

1. В
2. Б
3. В
4. Г
5. Г
6. Б
7. 1) Д; 2) В; 3) Г; 4) Б
8. 1) Г; 2) Д; 3) В; 4) А
9. 1
10. 8
11. 1
12. -4
13. -3
14. 5

ПОРАДНИК

Ірраціональні рівняння

ПАМ'ЯТАЄМО:

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитись сторонні корені, які відсіюють перевіркою або при ОДЗ.

При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому, тобто сторонні корені не з'являються.

