



ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА

З ТЕМИ:

«Рівняння та нерівності з модулем.»

Укладачі:

Ткаченко Олена Станіславівна,

Ліцей зі структурним підрозділом гімназії № 6
Покровської міської ради Донецької області

Рудик Валентина Василівна,

Загальноосвітня школа I-III ступенів № 9

Покровської міської ради Донецької області

МОДУЛЬ ЧИСЛА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

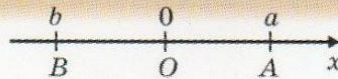
Таблиця 2

ОЗНАЧЕННЯ

Модулем додатного числа називається саме те число; модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0, \\ 0, & \text{якщо } a = 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ



$$|a| = OA, |b| = OB; |a - b| = BA$$

На координатній прямій модуль — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число

Модуль різниці чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій

ВЛАСТИВОСТІ

- | | | |
|--|---|----------------------------------|
| 1. $ a \geq 0$ | 2. $ -a = a $ | 3. $ a \cdot b = a \cdot b $ |
| 4. $ a^n = a ^n$; $ a^2 = a^2$; $ a^{2k} = a^{2k}$ | 5. $\left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b }$
($b \neq 0$) | |
| 6. $a \leq a $ | 7. $ a + b \leq a + b $ | |



THEORY

РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З МОДУЛЯМИ

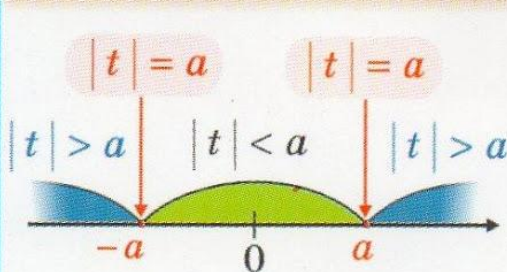
Розв'язування рівнянь
та нерівностей з модулями

за означенням

за геометричним змістом

за загальною схемою

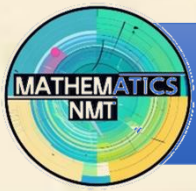
ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗМІСТУ МОДУЛЯ (при $a > 0$)



- $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a \text{ або } f(x) = -a$
- $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x)$
- $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \text{ або } f(x) > a$
- $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a \end{cases}$

ЗАГАЛЬНА СХЕМА

- Знайти ОДЗ
- Знайти нулі всіх підмодульних функцій
- Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки
- Знайти розв'язок у кожному з проміжків і перевірити, чи входить цей розв'язок у проміжок, що розглядається



ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Прості рівняння з модулями

Розглянемо загальний вигляд простого рівняння зі знаком модуля:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Таким чином, потрібно розв'язати два рівняння $f(x)=g(x)$ та $f(x)=-g(x)$, після чого залишити лише ті корені, які задовольняють умову $g(x) \geq 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $|3x-5|=8x-1$.

$$\begin{aligned} |3x-5| = 8x-1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = 8x-1, \\ 3x-5 = -(8x-1), \\ 8x-1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 4, \\ 11x = 6, \\ x \geq \frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5}, \\ x = \frac{6}{11}, \\ x \geq \frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

Було розв'язано два рівняння та знайдено їхні корені $x_1 = -\frac{4}{5}$; $x_2 = \frac{6}{11}$. Після цього був відібраний лише один корінь $x = \frac{6}{11}$, щоб задовольнити означення модуля.



THEORY

Основні властивості нерівностей

1. Співвідношення «менше» і «більше» протилежні одне одному.
якщо $8 > x$, то $x < 8$.

2. Відношення транзитивності:
якщо $x < a$ і $a < b$, то $x < b$;
якщо $x > a$ і $a > b$, то $x > b$.

3. Розкрити дужки в будь-якій частині нерівності.

$(x-4)(1-x) \geq 0$	Вихідна нерівність
$(x-4-x^2+4x) \geq 0$	Розкриваємо дужки
$-x^2+5x-4 \geq 0$	Спрощуємо

4. Звести подібні доданки в будь-якій частині нерівності.

$x^3 - 8 < x^2 - 3x - x^2$	Вихідна нерівність
$x^3 - 8 < x^2 - 3x - x^2$	Знаходимо подібні доданки
$x^3 - 8 < -3x$	Спрощуємо

5. До обох частин додати або ж відняти будь-який вираз.

$\sqrt{x} - x + 3 > 2$	Вихідна нерівність
$\sqrt{x} - x + 3 - 2 > 2 - 2$	Віднімаємо 2 від обох частин
$\sqrt{x} - x + 1 > 0$	Спрощуємо



THEORY

Основні властивості нерівностей

6. Обидві частини помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля:

Якщо вираз **додатний** - знак нерівності залишається без змін.

$3x^2 > 2$	Вихідна нерівність
$\frac{3}{3}x^2 > \frac{2}{3}$	Ділимо обидві частини на 3
$x^2 > \frac{2}{3}$	Спрощуємо

Якщо вираз **від'ємний** - знак нерівності змінюється на протилежний.

$-x^2 - 2 > 1$	Вихідна нерівність
$(-x^2 - 2) \cdot (-1) < 1 \cdot (-1)$	Множимо обидві частини на -1 та змінюємо знак на протилежний
$x^2 + 2 < -1$	Спрощуємо



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{|x|} = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$-12; 12$	$-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$

Це завдання перевіряє вміння розв'язувати дробово-раціональні рівняння зі змінною під знаком модуля. Задане рівняння рівносильне рівнянню $|x| = \frac{4}{3}$. Геометрично модуль числа – це відстань на координатній прямій від точки, що зображує це число, до початку відліку. На відстані $\frac{4}{3}$ від початку відліку знаходяться два числа: $x_1 = \frac{4}{3}$ і $x_2 = -\frac{4}{3}$. Обидва ці числа і є коренями заданого рівняння.

Відповідь – **Д**.

Розв'яжіть рівняння $\frac{|x|}{10} = 2$.

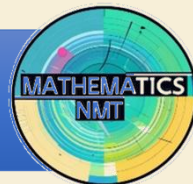
А	Б	В	Г	Д
$-5; 5$	$-20; 20$	20	5	$-0,2; 0,2$

Це завдання перевіряє вміння розв'язувати рівняння з модулем. Домножимо обидві частини рівняння $\frac{|x|}{10} = 2$ на 10, отримаємо $|x| = 20$. Модуль числа – це відстань на координатній осі x від цього числа до початку координат, звідси $x = \pm 20$.

Відповідь – **Б**.



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Розв'яжіть рівняння $|2x - 1| - 3 = 5$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть добуток усіх коренів.

За властивістю модуля:

$$\begin{cases} |2x - 1| - 3 = 5, \\ |2x - 1| - 3 = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} |2x - 1| = 8, \\ |2x - 1| = -2. \end{cases}$$

Рівняння $|2x - 1| = -2$ не має коренів, тому розв'яжемо тільки перше рівняння сукупності:

$$|2x - 1| = 8, \quad \begin{cases} 2x - 1 = 8, \\ 2x - 1 = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 9, \\ 2x = -7, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4,5 \\ x_2 = -3,5. \end{cases}$$

Рівняння має два корені. У відповідь запишемо добуток коренів:
 $x_1 \cdot x_2 = 4,5 \cdot (-3,5) = -15,75$.

Відповідь: **-15,75.**

Укажіть, скільки дійсних коренів має рівняння $x^3 - 4|x| = 0$.

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

За властивістю модуля числа:

1) при $x > 0$ $x^3 - 4x = 0$, $x(x - 2)(x + 2) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ не належить } [0; +\infty).$$

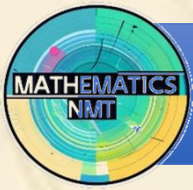
Рівняння має два корені.

2) при $x < 0$ $x^3 + 4x = 0$, $x(x^2 + 4) = 0$.

$x = 0$ не належить $(-\infty; 0)$.

Рівняння не має коренів.

Отже, при всіх значеннях x рівняння має 2 корені.



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Укажіть суму коренів рівняння $|x - 1| = 6$.

А	Б	В	Г	Д
-2	0	2	7	12

За означенням модуля:

$$\begin{cases} x - 1 = 6, & |x_1 = 7. \\ x - 1 = -6, & |x_2 = -5. \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 7 + (-5) = 2 - \text{сума коренів рівняння.}$$

Відповідь: **В.**

Для якого з наведених виразів виконується рівність $|x| = -x$?

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$	$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$	$x = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$	$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$

За означенням модуля числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0 \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

$$|x| = -x \text{ якщо } x < 0.$$

$$\text{З наведених виразів тільки } \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{4-5}{10} = -\frac{1}{10} < 0.$$

Відповідь - **В.**

Розв'язати рівняння $|x + 1| = 2x - 1$.

Розв'язання

Розглянемо два випадки, коли вираз $(x+1)$ під знаком модуля невід'ємний і коли від'ємний. При $x + 1 \geq 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$. При $x + 1 < 0 \Rightarrow |x + 1| = -(x + 1)$. Звідси, початкове рівняння еквівалентне сукупності двох змішаних систем:

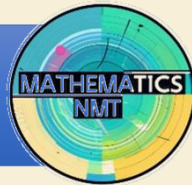
$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x + 1 = 2x - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 1 < 0, \\ -(x + 1) = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Перша система має розв'язок $x = 2$. Друга система розв'язків не має, тому

що $0 \notin (-\infty; -1)$.

Відповідь: $\{2\}$.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Розв'яжіть нерівність $|x + 4| \cdot (x - 1) < 0$.

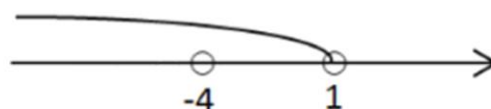
А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$	$(-4; 1)$	$(-\infty; 1)$	$(-1; 4)$	$(-\infty; -4) \cup (-4; 1)$

I спосіб

Вираз $|x + 4| \geq 0$ при будь-яких значеннях змінної, тому розв'язком нерівності є розв'язок системи:

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ x - 1 < 0, \end{cases} \begin{cases} x \neq -4 \\ x < 1 \end{cases}$$

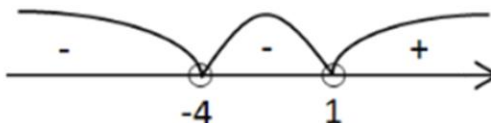
$$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 1).$$



II спосіб.

Розв'язуємо методом інтервалів:

$$|x + 4|(x - 1) < 0$$



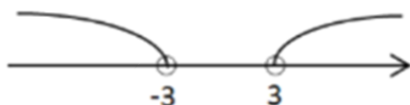
$$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 1).$$

Відповідь — Д.

Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності $|x| > 3$?

А	Б	В	Г	Д
3	1	0	-3	-8

Розв'язок нерівності



Отже, з наведених чисел $x = -8$ є розв'язком нерівності.

Відповідь: Д.

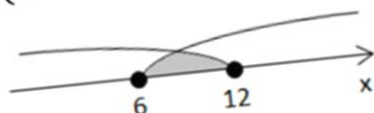


ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Розв'яжіть нерівність $|x - 9| \leq 3$. У відповіді запишіть суму всіх її цілих розв'язків на проміжку $[-15; 15]$.

$$\begin{cases} x - 9 \leq 3, \\ x - 9 \geq -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 12, \\ x \geq 6. \end{cases}$$



Сума всіх цілих розв'язків:

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 63$$

Всі розв'язки містяться на проміжку $[-15; 15]$.

Відповідь: 63.

Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x < 81, \\ |x| \leq 5. \end{cases}$$

- А $(-\infty; 4)$
- Б $[5; \infty)$
- В $[-5; -4)$
- Г $(-4; 5]$
- Д $[-5; 4)$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x < 81, \\ |x| \leq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}, \\ -5 \leq x \leq 5; \end{cases}$$

функція $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ зменшується, оскільки основа степені $\frac{1}{3} < 1$.

Отже,

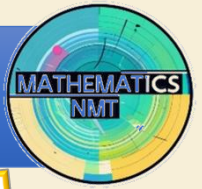
$$\begin{cases} x > -4, \\ -5 \leq x \leq 5. \end{cases}$$



Розв'язок системи – спільний розв'язок двох нерівностей. Отже, $x \in (-4; 5]$.

Відповідь: Г.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності $|-2x - 3| > 5$?

- А -2
- Б -1
- В 0
- Г 1
- Д 2**

Розв'язком нерівності $|-2x - 3| > 5$ з наведених чисел є 2.
 $|-2 \cdot 2 - 3| > 5$, $|-4 - 3| > 5$,
 $|-7| > 5$, $7 > 5$.

Відповідь: **Д.**

Розв'язати нерівність $\frac{x^2 - 3|x| - 4}{x + 1} < -3x$.

Розв'язання

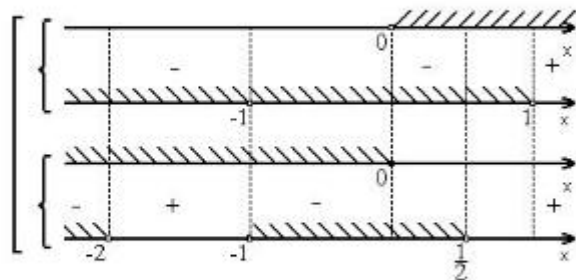
Розпишемо дану нерівність у вигляді сукупності двох систем:

$$\frac{x^2 - 3|x| - 4}{x + 1} < -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} < -3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{x^2 - 3x - 4 + 3x(x + 1)}{x + 1} < 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} < -3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ \frac{x^2 + 3x - 4 + 3x(x + 1)}{x + 1} < 0; \end{cases}$$

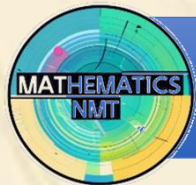
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{4x^2 - 4}{x + 1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (x - 1)(x + 1)(x + 1) < 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ \frac{4x^2 + 6x - 4}{x + 1} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ (2x - 1)(x + 2)(x + 1) < 0; \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0, 1), \\ x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1).$$

Відповідь: **$x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1)$.**



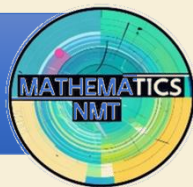
ВІДЕО БЛОК



**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК



**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**





ІНТЕРАКТИВНИЙ БЛОК



Зосередьтеся! Поспішайте не поспішаючи! Жорсткі рамки часу не повинні впливати на якість Ваших відповідей. Перед тим, як вписати відповідь, перечитайте питання двічі і переконайтеся, що Ви правильно зрозуміли, що від Вас вимагається.

- **Починайте з легкого!** Відповідайте на ті питання, у правильності яких Ви не сумніваєтеся, не зупиняючись на тих, які можуть викликати довгі роздуми. Тоді Ви заспокоєтесь, голова почне працювати ясніше і чіткіше, і Ви увійдете в робочий ритм. Ви немовбито звільнитесь від нервозності, і вся Ваша енергія потім буде спрямована на важкі питання.
- **Пропускайте!** Треба навчитися пропускати важкі або незрозумілі завдання. Пам'ятайте: у тексті завжди знайдуться такі питання, з якими Ви обов'язково впораєтесь. Просто безглуздо недобрати балів тільки тому, що Ви не дійшли до "своїх" завдань, а зупинилися на тих, які викликають у Вас труднощі.
- **Читайте завдання до кінця!** Поспіх не повинен призводити до того, що Ви прагнете зрозуміти умови завдання "за першими словами" і добудовуєте кінцівку у власній уяві. Це вірний спосіб зробити прикрі помилки в найлегших питаннях.
- **Думайте тільки про поточне завдання!** Коли Ви бачите нове завдання, забудьте все, що було в попередньому. Як правило, завдання в тестах не пов'язані одне з одним, тому знання, які Ви застосували в одному (уже, припустимо, розв'язаному Вами), як правило, не допомагають, а тільки заважають сконцентруватися і правильно розв'язати нове завдання. Ця порада дає Вам і інший безцінний психологічний ефект - забудьте про невдачу в минулому завданні (якщо воно було Вам не під силу). Думайте тільки про те, що кожне нове завдання - це шанс набрати бали.
- **Виключайте!** Більшість завдань можна розв'язати швидше, якщо не шукати одразу правильний варіант відповіді, а послідовно виключати ті, які дійсно не підходять. Метод виключення дозволяє у результаті сконцентрувати увагу всього на одному-двох варіантах, а не на всіх п'яти-семи (що набагато важче).
- **Заплануйте два кола!** Розрахуйте час так, щоб за дві третини всього відведеного часу пройти за всіма легкими завданнями ("перше коло"). Тоді Ви встигнете набрати максимум балів на цих завданнях, а потім спокійно повернутися і подумати над важкими, які Вам спочатку довелося пропустити ("друге коло").
- **Перевірте!** Залиште час для перевірки своєї роботи, щоб встигнути пробігти очима і відмітити очевидні помилки.
- **Довіряйте інтуїції!** Якщо Ви не впевнені у виборі відповіді, але інтуїтивно можете віддати перевагу якійсь відповіді іншим, то інтуїції слід довіряти! При цьому вибирайте такий варіант, який, на Ваш погляд, має велику вірогідність.
- **Не засмучуйтеся!** Прагніть виконати всі завдання, але пам'ятайте, що тестові завдання розраховані на максимальний рівень важкості і, навіть якщо Ви розв'яжете не