



**ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ**

**ДОРОЖНЯ КАРТА  
З ТЕМИ:  
«Системи рівнянь, нерівностей»**

***Укладач: Сорокіна Антоніна Володимирівна***

Навчально-виховний комплекс "Сергіївська загальноосвітня школа  
І-ІІІ ступенів - дошкільний навчальний заклад" Удачненської  
селищної ради Покровського району Донецької області

# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

**Система лінійних рівнянь з двома змінними:**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{— де } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \text{ — задані числа,} \\ \text{а } x \text{ і } y \text{ — змінні.} \end{array}$$

**Системою рівнянь** називаються два або декілька рівнянь, у яких потрібно знайти всі спільні розв'язки.

Рівняння системи записуються стовпчиком і об'єднуються фігурною дужкою.

Система рівнянь називається **лінійною**, якщо всі рівняння, що входять до системи, є лійними.

Систему двох лінійних рівнянь з двома змінними записують у такому вигляді:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Розв'язками такої системи рівнянь є множина упорядкованих пар чисел  $(x; y)$ .

Пара чисел  $(3; -1)$  є розв'язком системи

- **Розв'язати систему рівнянь** — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.
- Якщо система має скінченне число розв'язків, то вона називається **визначеною**.
- Якщо система має нескінченну множину розв'язків, то система називається **невизначеною**.
- Дві системи називаються **рівносильними**, якщо вони мають однакову множину розв'язків.

# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Якщо система з  $n$  лінійних рівнянь містить  $n$  невідомих, то можливі такі

три випадки:

- система не має розв'язків;
- система має тільки один розв'язок;
- система має нескінченно багато розв'язків.

$$\text{Система } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Не має розв'язків, якщо  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Має єдиний розв'язок, якщо  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ .

Має нескінченне число розв'язків, якщо  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$1) \begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ 6x - 8 = 11 \end{cases}$$

$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{15}{11}$  — розв'язків немає;

$$2) \begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

$$\frac{3}{1} \neq -\frac{4}{1},$$

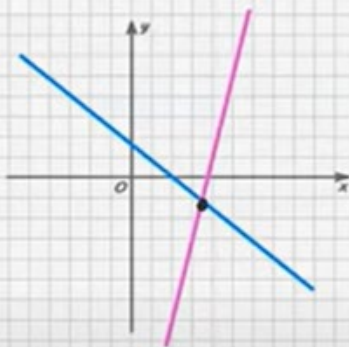
єдиний розв'язок (7; 2);

$$3) \begin{cases} 3x - 4y + 15 \\ 6x - 8y = 30 \end{cases}$$

$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} = \frac{15}{30}$ , нескінченно багато розв'язків

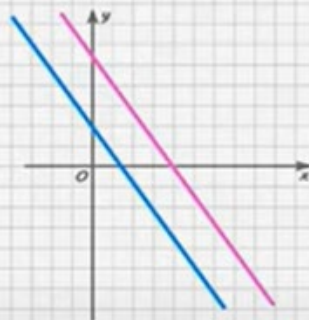
## КІЛЬКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$



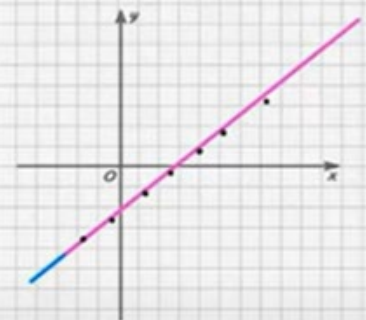
$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

1 розв'язок



$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Немає розв'язків



$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Безліч розв'язків



# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

| Типи систем                                                                  | Приклади                                                   |                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1) $\begin{cases} \text{жодної точки,} \\ \text{жодної точки.} \end{cases}$  | $\begin{cases} 0x + 0y = 1 \\ 0x = 0y = 2 \end{cases}$     | Система немає розв'язків                                |
| 2) $\begin{cases} \text{вся площа,} \\ \text{жодної точки} \end{cases}$      | $\begin{cases} 0x = 0y = 0 \\ 0x + 0y = -1 \end{cases}$    | Система немає розв'язків                                |
| 3) $\begin{cases} \text{Вся площа,} \\ \text{вся площа.} \end{cases}$        | $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$     | Будь-яка пара чисел – розв'язок системи                 |
| 4) $\begin{cases} \text{Жодної точки,} \\ \text{пряма.} \end{cases}$         | $\begin{cases} 0x + 0y = 6 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$     | Система немає розв'язків                                |
| 5) $\begin{cases} \text{Вся площа,} \\ \text{пряма.} \end{cases}$            | $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 2x + 7y = 5 \end{cases}$     | Розв'язок системи – координати будь-якої точки прямої.  |
| 6) $\begin{cases} \text{Дві прямі, що} \\ \text{перетинаються.} \end{cases}$ | $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$        | Єдиний розв'язок – координати точки перетину прямої.    |
| 7) $\begin{cases} \text{Дві паралельні} \\ \text{прямі.} \end{cases}$        | $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$         | Система не має розв'язків.                              |
| 8) $\begin{cases} \text{Дві прямі, які} \\ \text{співпадають.} \end{cases}$  | $\begin{cases} x + y = ( ), \\ 2x + 2y = ( ). \end{cases}$ | Координати будь-якої точки прямої є розв'язком системи. |

## Система лінійних рівнянь

### Методи розв'язання

Метод  
графічний.

Метод  
підстановки.

Метод  
додавання.

## ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

### Щоб розв'язати систему рівнянь графічним способом, потрібно:

1. виконати рівносильні перетворення системи так, щоб було зручно побудувати графіки рівнянь системи;
2. побудувати графіки;
3. знайти координати точок (точки) перетину побудованих ліній.

*Ці координати і є розв'язками (розв'язком) системи рівнянь.*

*Зауваження.*

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь не є універсальним, оскільки не завжди розв'язком системи є пара цілих чисел. Іноді важко точно встановити координати точки перетину побудованих графіків функцій, можливо лише вказати наближенні значення.

Тому, як правило, використовують алгебраїчні способи розв'язування систем рівнянь: спосіб підстановки, додавання.

### Щоб розв'язати систему рівнянь способом підстановки, потрібно:

1. з одного рівняння системи виражаємо одну зі змінних через другу змінну і відомі величини;
2. знайдене значення підставляємо в друге рівняння системи, одержуємо рівняння відносно другої змінної;
3. розв'язуємо одержане рівняння і знаходимо значення цієї змінної;
4. підставляючи знайдене значення у вираз для першої змінної, одержуємо відповідне її значення;
5. записуємо відповідь.

*Зауваження.* Спосіб підстановки, як правило, використовують, якщо коефіцієнт при одній зі змінних в одному з рівнянь системи дорівнює 1.



# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

## Щоб розв'язати систему рівнянь способом додавання, потрібно:

- 1) урівнюємо коефіцієнти при одній зі змінних шляхом по членного множення обох рівнянь на множники, підібрані відповідним чином;
- 2) додаючи (або віднімаючи) почленно рівняння системи, виключаємо одну зі змінних;
- 3) розв'язуємо одержане рівняння з однією змінною;
- 4) значення другої змінної можна знайти таким же способом (або підстановкою знайденого значення змінної в будь-яке із заданих рівнянь системи);
- 5) записуємо відповідь.

**Зауваження.** Спосіб додавання, як правило, використовують, якщо коефіцієнти при одній зі змінних у рівнянні системи – протилежні числа.

# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Системи рівнянь другого степеня з двома змінними — це такі системи рівнянь, одне з яких є рівнянням другого степеня з двома змінними, а друге — рівнянням першого або другого степеня з тими ж змінними

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 - y = 0 \\ y + 5x = -x^2 + 1 \end{cases}$$

**Метод заміни змінної** для розв'язування систем рівнянь можна застосовувати таким чином.

- 1) Або ввести **одну нову** змінну і використати заміну тільки в **одному** рівнянні системи.

Наприклад: для розв'язання системи 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,5, \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$
 вводимо

одну змінну  $t = \frac{x}{y}$ . Перше рівняння матиме вигляд:  $t + \frac{1}{t} = 2,5$ .

- 2) Або ввести **дві нові** змінні і використати їх одночасно в **обох** рівняннях системи.

Наприклад: для розв'язання системи 
$$\begin{cases} \frac{2}{x-3y} + \frac{3}{2x+y} = 2, \\ \frac{8}{x-3y} - \frac{9}{2x+y} = 1 \end{cases}$$
 вводи-

мо дві змінні:  $a = \frac{2}{x-3y}$ ,  $b = \frac{3}{2x+y}$ . Ураховуючи, що  $\frac{8}{x-3y} = 4a$ ,

$\frac{9}{2x+y} = 3b$ , запишемо систему у вигляді: 
$$\begin{cases} a + b = 2, \\ 4a - 3b = 1. \end{cases}$$

# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

## Системи нерівностей

*Якщо доводиться знаходити спільні розв'язки двох або більшої кількості нерівностей з однією і тією самою змінною, то кажуть, що ці нерівності утворюють систему нерівностей.*

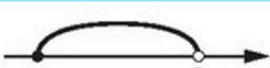
*Систему нерівностей позначають фігурною дужкою:*

$$\begin{cases} 2x - 6 > 0, \\ 0,5x + 1 > 0. \end{cases}$$

**Розв'язок системи нерівностей** – це значення змінної, яке задовольняє кожную нерівність системи.

**Розв'язати систему нерівностей** – означає знайти всі її розв'язки або показати, що вона їх немає.

## Таблиця позначень і зображень числових проміжків

| Нерівність        | Проміжок | Зображення                                                                            |
|-------------------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $a \leq x \leq b$ | $[a; b]$ |  |
| $a < x < b$       | $(a; b)$ |  |
| $a < x \leq b$    | $(a; b]$ |  |
| $a \leq x < b$    | $[a; b)$ |  |



# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

## Приклади, що приводять до систем нерівностей

До систем лінійних нерівностей з однією змінною може привести розв'язування деяких нерівностей, які не є лінійними. До них належать, зокрема, нерівності виду:  
 $(ax + b)(cx + d) > 0, \frac{ax + b}{cx + d} > 0 \quad (ax + b)(cx + d) < 0, \frac{ax + b}{cx + d} < 0$

Для їх розв'язання використовують твердження:

- добуток або частка двох виразів додатні тоді і лише тоді, якщо обидва ці вирази мають однакові знаки;
- добуток або частка двох виразів від'ємні тоді і лише тоді, якщо ці вирази мають протилежні знаки.

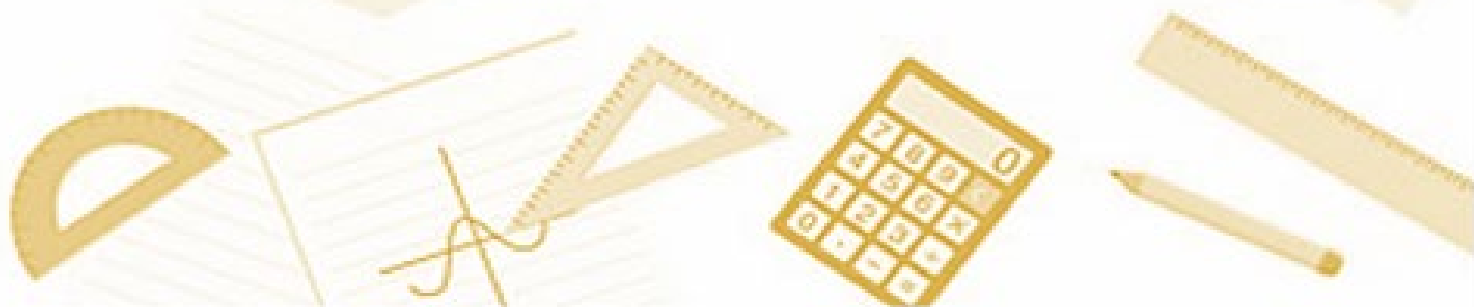
Отже,  $(ax + b)(cx + d) > 0 \left( \frac{ax + b}{cx + d} > 0 \right)$ , якщо  $\begin{cases} ax + b > 0, \\ cx + d > 0; \end{cases}$  або  $\begin{cases} ax + b < 0, \\ cx + d < 0; \end{cases}$

Розв'язавши кожну з цих систем, отримаємо розв'язки даних нерівностей.

## Як розв'язати подвійну нерівність

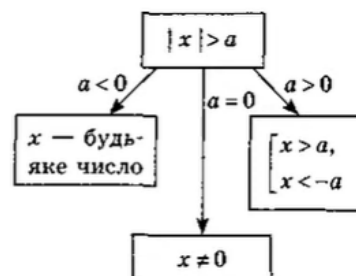
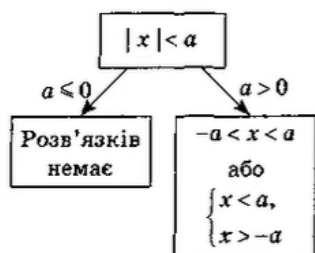
Оскільки подвійна нерівність  $a < x < b$  означає, що значення змінної  $x$  одночасно більші від  $a$  і менші від  $b$ , то цю умову можна записати і у вигляді системи

$$\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$$



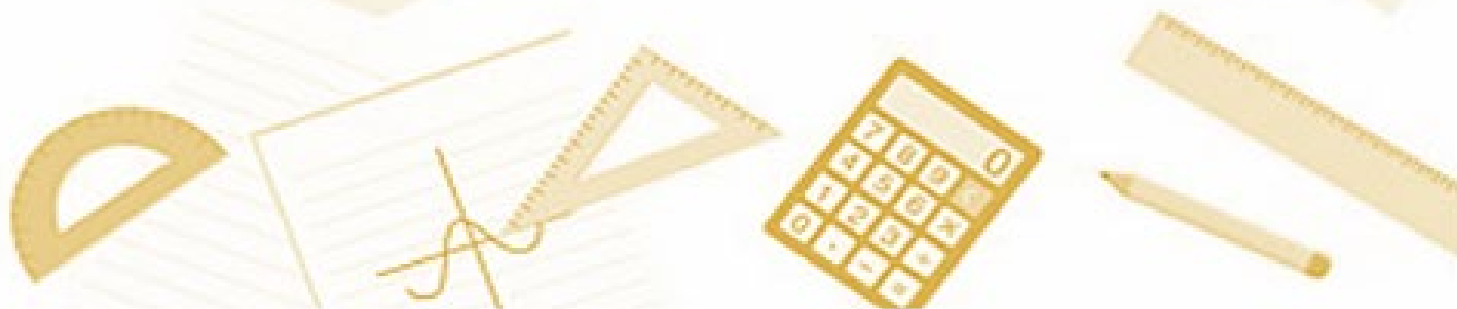
# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Розв'язування найпростіших нерівностей з модулем :



Якщо  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то рівняння виду  
 $\log_a f(x) = \log_a g(x)$   
рівносильне будь-якій із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$



# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Приклад 1

Розв'яжіть систему рівнянь  
графічним способом

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

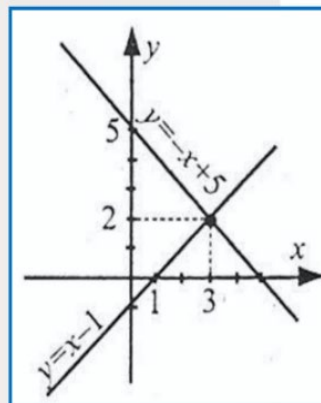
Побудуємо графіки рівнянь  $x+y=5$  або  $y=-x+5$  (пряма, яка проходить через точки  $(0;5)$  і  $(5;0)$ )

та  $x-y=1$  або  $y=x-1$  (пряма, яка проходить через точки  $(0;-1)$  та  $(1;0)$ ).

Ці графіки перетинаються в точці  $(3;2)$ .

Отже, розв'язком системи є пара  $(3;2)$ .

Відповідь:  $(3;2)$ .



## Приклад 2

Виразимо  
у через x

$$\begin{cases} y - x = 2, \\ y + x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = 10 - x \end{cases}$$

Побудуємо графік першого рівняння

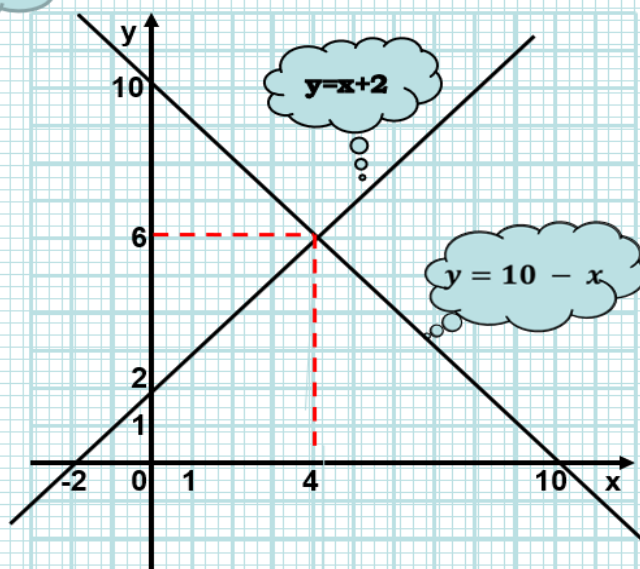
$$y = x + 2$$

|   |   |    |
|---|---|----|
| x | 0 | -2 |
| y | 2 | 0  |

Побудуємо графік другого рівняння

$$y = 10 - x$$

|   |    |    |
|---|----|----|
| x | 0  | 10 |
| y | 10 | 0  |



Відповідь:  $(4; 6)$



# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Приклад 3

**Розв'яжіть систему рівнянь  
способом підстановки**

$$\begin{cases} 2x + y = 6, \\ 4x - 3y = 2. \end{cases}$$

*Розв'язання*

Із першого рівняння системи виразимо  $y$  через  $x$ :

$$y = 6 - 2x.$$

Одержаний вираз підставимо в друге рівняння системи:

$$4x - 3(6 - 2x) = 2;$$

$$4x - 18 + 6x = 2;$$

$$10x = 20;$$

$$x = 2.$$

Одержане значення  $x$  підставляємо у вираз

$$y = 6 - 2x;$$

$$y = 6 - 2 \cdot 2$$

$$y = 2.$$

Отже, пара  $(2; 2)$  – розв'язок даної системи.

*Відповідь:*  $(2; 2)$ .

## Приклад 4

**Розв'яжіть систему рівнянь  
способом додавання**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 5x - 3y = 2. \end{cases}$$

*Розв'язання*

Помножимо почленно перше рівняння системи на 3, а друге – на 2 (це дає змогу при додаванні рівнянь позбавитися від змінної  $y$ ):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5| \cdot 3, & \begin{cases} 9x + 6y = 15, \\ 10x - 6y = 4. \end{cases} \\ 5x - 3y = 2| \cdot 2, \end{cases}$$

Додавши почленно рівняння, одержуємо  $19x = 19$ , звідси  $x = 1$  (значення  $y$  знайдемо з першого рівняння системи:  $3 \cdot 1 + 2y = 5$ ,  $2y = 2$ ,  $y = 1$ , отже,  $(1; 1)$  – розв'язок системи).

Значення  $y$  можна знайти, якщо помножимо почленно перше рівняння на  $-5$ , а друге – на 3:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5| \cdot (-5), & \begin{cases} -15x - 10y = -25, \\ 15x - 9y = 6. \end{cases} \\ 5x - 3y = 2| \cdot 3, \end{cases}$$

Додавши почленно рівняння, одержуємо:

$$-19y = -19, \quad y = 1.$$

Отже, пара  $(1; 1)$  є розв'язком даної системи.

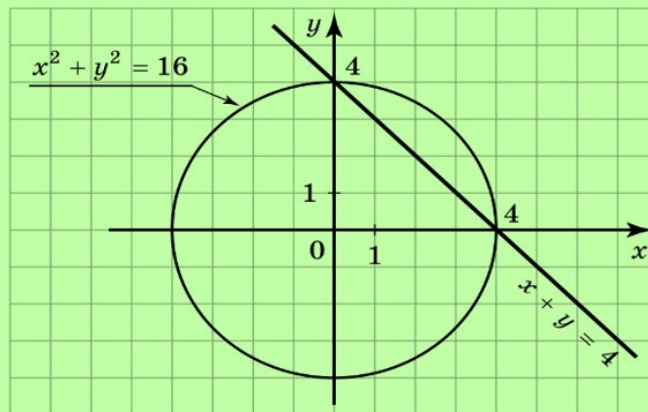
*Відповідь:*  $(1; 1)$ .

# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Приклад 5

Розв'язати графічно систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y = 4. \end{cases}$$



Мал. 72

Відповідь. (0; 4), (4; 0).

## Приклад 6

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Виразимо з другого рівняння змінну  $x$  через змінну  $y$ :  $x = 5 - 3y$ .

Підставимо в перше рівняння замість  $x$  вираз  $5 - 3y$  та отримаємо рівняння зі змінною  $y$ :

$$3y^2 - (5 - 3y)y = -1.$$

Після спрощень матимемо рівняння  $6y^2 - 5y + 1 = 0$ , корені якого  $y_1 = \frac{1}{2}$ ;  $y_2 = \frac{1}{3}$ .

За формулою  $x = 5 - 3y$  знаходимо значення  $x$ , що відповідають знайденим значенням  $y$ :

$$x_1 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}; \quad x_2 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

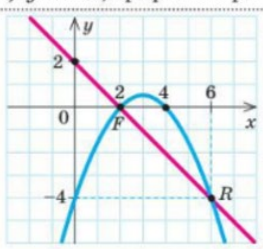
Отже, система має два розв'язки:

$$x_1 = 3\frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{2} \quad \text{та} \quad x_2 = 4, y_2 = \frac{1}{3}.$$

# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Приклад 7

Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь 
$$\begin{cases} 3x - 4 = y + \frac{1}{2}x^2; \\ y + x = 2. \end{cases}$$

| Крок   | Зміст дії                                                                                                              | Результат дії                                                                                                                                                                                      |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| КРОК 1 | Зведемо кожне рівняння системи до вигляду функції $y = f(x)$ .                                                         | $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$ — квадратична функція;<br>$y = 2 - x$ — лінійна функція                                                                                                             |
| КРОК 2 | Проаналізуємо отримані функції, визначимо «зручні» точки для побудови графіків цих функцій.                            | 1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$ , графік — парабола з вершиною в точці $(3; 0,5)$ , вітки направлені вниз, $y(0) = -4$ ; нулі функції: $x = 2$ , $x = 4$ .<br>2) $y = 2 - x$ , графік — пряма    |
| КРОК 3 | Побудуємо в одній системі координат графіки обох функцій та визначимо точки їх перетину. Зробимо висновок.             | <br>$F(2; 0)$ ,<br>$R(6; -4)$<br>Пари чисел $(2; 0)$ і $(6; -4)$ є наближеними розв'язками заданої системи       |
| КРОК 4 | Перевіримо, чи є отримані розв'язки точними. Для цього здійснимо їх безпосередню підстановку в кожне рівняння системи. | $\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 = 0 + 2, & \text{(правильно);} \\ 0 + 2 = 2 \end{cases}$<br>$\begin{cases} 3 \cdot 6 - 4 = -4 + \frac{1}{2} \cdot 36, & \text{(правильно)} \\ -4 + 6 = 2 \end{cases}$ |

## Приклад 8

Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} x^2 + xy = 24, \\ y^2 + xy = 40. \end{cases}$$

### Спосіб 1

| Крок   | Зміст дії                                                                                                                                                            | Результат дії                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| КРОК 1 | Використаємо <b>спосіб додавання</b> — додамо почленно обидва рівняння системи.                                                                                      | $\begin{aligned} &+ \begin{cases} x^2 + xy = 24, \\ y^2 + xy = 40 \end{cases} \\ & \hline x^2 + 2xy + y^2 = 64, \quad (x+y)^2 = 64 \end{aligned}$                                                                                                                                                                                                                                                |
| КРОК 2 | Добудемо квадратний корінь з обох частин рівняння, отриманого на кроці 1, урахувуючи, що $\sqrt{a^2} =  a $                                                          | $\sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{64}; \quad  x+y  = 8;$<br>$x+y = 8 \quad \text{або} \quad x+y = -8$                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| КРОК 3 | До кожного з отриманих рівнянь допишемо одне з рівнянь початкової системи, наприклад перше. Отримаємо дві незалежні системи рівнянь.                                 | $\begin{cases} x+y=8, \\ x^2+xy=24 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x+y=-8, \\ x^2+xy=24 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| КРОК 4 | Розв'яжемо кожну систему <b>способом підстановки</b> . Розкладемо на множники ліву частину другого рівняння та підставимо в нього значення $x+y$ з першого рівняння. | $\begin{aligned} &\begin{cases} x+y=8, \\ x(x+y)=24 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x+y=-8, \\ x(x+y)=24; \end{cases} \\ &\begin{cases} x+y=8, \\ x \cdot 8=24 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x+y=-8, \\ x \cdot (-8)=24; \end{cases} \\ &\begin{cases} y=5, \\ x=3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y=-5, \\ x=-3 \end{cases} \end{aligned}$ |



# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Спосіб 2

| Крок   | Зміст дії                                                                                                                                                                       | Результат дії                                                                                                                                                                                     |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| КРОК 1 | Розкладемо на множники ліву частину кожного рівняння. <b>Розділимо почленно</b> перше рівняння на друге, $y(y+x) \neq 0$ .                                                      | $\begin{cases} x(x+y)=24, & \frac{x(x+y)}{y(y+x)} = \frac{24}{40}; & \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \\ y(y+x)=40; & \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \end{cases}$                                             |
| КРОК 2 | Допишемо до одного з рівнянь початкової системи отримане рівняння.                                                                                                              | $\begin{cases} x(x+y)=24, \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \end{cases}$                                                                                                                               |
| КРОК 3 | Розв'яжемо отриману систему <b>способом підстановки</b> . Виразимо з другого рівняння системи змінну $y$ через змінну $x$ та підставимо отримане значення $y$ в друге рівняння. | $\begin{cases} y = \frac{5}{3}x, & x\left(x + \frac{5}{3}x\right) = 24; & x \cdot \frac{8}{3}x = 24; \\ x(x+y)=24; & \frac{8}{3}x^2 = 24; & x^2 = 9; & x_1 = 3 \text{ або } x_2 = -3 \end{cases}$ |
| КРОК 4 | Для кожного значення $x$ знайдемо відповідне значення $y$ .                                                                                                                     | $y_1 = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5; y_2 = \frac{5}{3} \cdot (-3) = -5.$<br>Отже: $x_1 = 3, y_1 = 5; x_2 = -3, y_2 = -5$                                                                               |

Відповідь:  $(-3; -5); (3; 5)$ .

## Приклад 9

Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x + y = 3. \end{cases}$

### Розв'язання

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x = 3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{3-y} + 2^y = 6, \\ x = 3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{8}{2^y} + 2^y = 6, \\ x = 3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} (2^y)^2 - 6 \cdot 2^y + 8 = 0, \\ x = 3 - y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^y = 4, \\ x = 3 - y; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2^y = 2, \\ x = 3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = 3 - y; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y = 1, \\ x = 3 - y. \end{cases}$$

Отже,  $\begin{cases} y = 2, \\ x = 1 \end{cases}$  і  $\begin{cases} y = 1, \\ x = 2 \end{cases}$  є розв'язками системи.

Відповідь:  $(1; 2), (2; 1)$ .

# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Приклад 10

Розв'яжіть систему 
$$\begin{cases} 5\cos\frac{\pi y}{2} = x^2 - 8x + 21, \\ y + 5x - 4 = 0. \end{cases}$$

Якщо система має єдиний розв'язок  $(x_0; y_0)$ , то у відповідь запишіть суму  $x_0 + y_0$ ; якщо система має більше, ніж один розв'язок, то у відповідь запишіть *кількість* усіх розв'язків.

### Розв'язання

Використаємо властивість функцій для розв'язку рівняння

$$5\cos\frac{\pi y}{2} = x^2 - 8x + 21.$$

Оцінимо вирази:

$$-1 \leq \cos\frac{\pi y}{2} \leq 1,$$

$$-5 \leq 5\cos\frac{\pi y}{2} \leq 5.$$

$$x^2 - 8x + 21 = x^2 - 8x + 16 + 5 = (x - 4)^2 + 5.$$

$$(x - 4)^2 + 5 \geq 5, \text{ бо } (x - 4)^2 \geq 0.$$

Отже, рівність  $5\cos\frac{\pi y}{2} = (x - 4)^2 + 5$  досягається при значенні змінних  $x$  та  $y$ ,

при яких ліва і права частина дорівнюють 5.

$$(x - 4)^2 + 5 = 5 \text{ при } x = 4$$

$$5\cos\frac{\pi y}{2} = 5, \cos\frac{\pi y}{2} = 1, \frac{\pi y}{2} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ при } y = 4n, n \in \mathbb{Z}.$$

Розв'язком першого рівняння є пара  $(4; 4n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Підставимо у друге рівняння:

$$y + 5x - 4 = 0, 4n + 5 \cdot 4 - 4 = 0, 4n = -16, n = -4.$$

Отже, розв'язок системи  $(4; -16)$ .

У відповідь запишемо суму  $x_0 + y_0 = 4 + (-16) = -12$ .

**Відповідь: -12.**

# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Приклад 11

Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x-2}\sqrt{2x+1} = \sqrt{3}$ .

Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповіді зазначте добуток усіх коренів. Якщо рівняння не має коренів, то у відповіді запишіть число 100.

### Розв'язання

Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 2x+1 \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq -0,5, \end{cases} x \in [2; +\infty).$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$$(x-2)(2x+1) = 3, 2x^2 + x - 4x - 2 - 3 = 0, 2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2(-5) = 49. x_1 = \frac{3+7}{4} = 2,5; x_2 = \frac{3-7}{4} = -1 \notin \text{ОДЗ}.$$

Відповідь: 2,5.

## Приклад 12

З міста  $A$  до міста  $B$ , відстань між якими 264 км, виїхав мотоцикліст. Через 2 год після цього назустріч йому з міста  $B$  виїхала велосипедистка, яка зустрілася з мотоциклістом через 1 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо за 2 год мотоцикліст проїжджає на 40 км більше, ніж велосипедистка за 5 год.

*Розв'язання.* Нехай швидкість мотоцикліста дорівнює  $x$  км/год, а велосипедистки —  $y$  км/год. До зустрічі мотоцикліст рухався 3 год і проїхав  $3x$  км, а велосипедистка відповідно — 1 год та  $y$  км. Разом вони проїхали 264 км. Тоді  $3x + y = 264$ .

Велосипедистка за 5 год проїжджає  $5y$  км, а мотоцикліст за 2 год —  $2x$  км, що на 40 км більше за  $5y$  км. Тоді  $2x - 5y = 40$ .

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y = 264, \\ 2x - 5y = 40, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел  $x = 80$ ,  $y = 24$ .

Отже, швидкість мотоцикліста дорівнює 80 км/год, а велосипедистки — 24 км/год.

*Відповідь:* 80 км/год, 24 км/год.



## ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

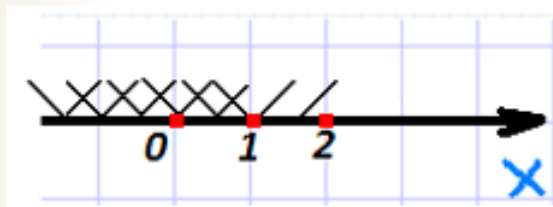
### Приклад 13

Розв'язати систему  
нерівностей

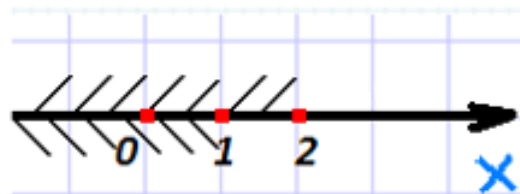
$$\begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} -x \geq -1, & \begin{cases} x \leq 1, \\ -x \geq -2; & \begin{cases} x \leq 2. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$



або



З рисунка видно, що  
розв'язком системи є  $x \leq 1$ ,  
тобто  $x \in (-\infty; 1]$

# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Приклад 14

Знайти область допустимих значень змінної у виразі

$$\sqrt{2x-2} + \sqrt{9-3x}$$

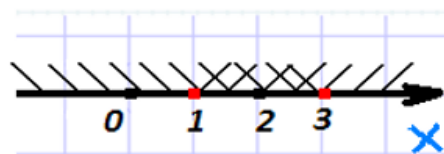
Розв'язання:

Аби даний вираз мав смисл, треба, щоб підкореневі вирази були невід'ємними:  $2x - 2 \geq 0$  і  $9 - 3x \geq 0$ .

Оскільки ця умова повинна виконуватися одночасно, то маємо систему: 
$$\begin{cases} 2x - 2 \geq 0, \\ 9 - 3x \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо її.

$$\begin{cases} 2x \geq 2, \\ -3x \geq -9; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 3. \end{cases}$$

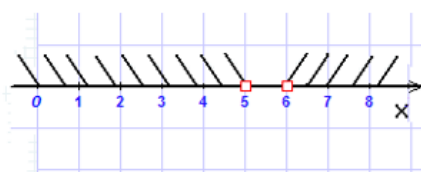


Бачимо, що спільні розв'язки нерівностей системи належать числовому проміжку  $[1; 3]$ , який можна записати у вигляді подвійної нерівності  $1 \leq x \leq 3$ .

## Приклад 15

Розв'язати систему нерівностей 
$$\begin{cases} 5x - 25 < 0, \\ 0,5x - 3 > 0. \end{cases}$$

Розв'язання: 
$$\begin{cases} 5x < 25, \\ 0,5x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5, \\ x > 6. \end{cases}$$



Очевидно, що числові проміжки  $(-\infty; 5)$  і  $(6; \infty)$  не мають жодного спільного числа. Тому система нерівностей не має розв'язку. У такому випадку кажуть, що переріз даних числових проміжків – порожня множина, яку позначають знаком  $\emptyset$ .

# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Приклад 16

Розв'язати нерівність:  $\frac{3x-5}{4x+8} > 0$

Розв'язання. Ця нерівність рівносильна сукупності таких двох систем:  $\begin{cases} 3x-5 > 0, \\ 4x+8 > 0; \end{cases}$  і  $\begin{cases} 3x-5 < 0, \\ 4x+8 < 0. \end{cases}$

Розв'яжемо кожну з них.

$$\begin{cases} 3x > 5, \\ 4x > -8; \end{cases} \begin{cases} x > \frac{5}{3}, \\ x > -2; \end{cases} \quad x > \frac{5}{3}, \text{ тобто } x \in \left(\frac{5}{3}; \infty\right).$$
$$\begin{cases} 3x < 5, \\ 4x < -8; \end{cases} \begin{cases} x < \frac{5}{3}, \\ x < -2; \end{cases} \quad x < -2, \text{ тобто } x \in (-\infty; -2).$$

Розв'язком даної нерівності є числова множина, яка складається з чисел першого і другого отриманих числових проміжків. Така множина називається **об'єднанням цих проміжків і позначається за допомогою знака  $\cup$**

Отже,  $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; \infty\right)$ .

Числові проміжки в їх об'єднанні розташовують, як правило, в порядку зростання чисел

## Приклад 17

$$6 < 2x + 10 < 20.$$

Запишемо дану нерівність у вигляді системи  $\begin{cases} 2x + 10 > 6, \\ 2x + 10 < 20; \end{cases}$

і будемо розв'язувати її, ілюструючи кожен крок відповідною подвійною нерівністю.

Маємо:  $\begin{cases} 2x + 10 > 6, \\ 2x + 10 < 20; \end{cases} \quad 6 < 2x + 10 < 20;$

$$\begin{cases} 2x > 6 - 10, \\ 2x < 20 - 10; \end{cases} \quad 6 - 10 < 2x < 20 - 10;$$
$$\begin{cases} 2x > 6 - 10, \\ 2x < 20 - 10; \end{cases} \quad 6 - 10 < 2x < 20 - 10;$$
$$\begin{cases} x > -2, \\ x < 5; \end{cases} \quad -2 < x < 5.$$

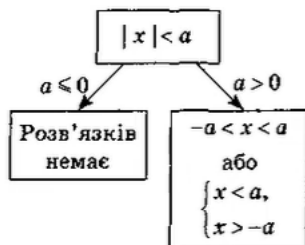
Відповідь.  $-2 < x < 5$  або  $x \in (-2; 5)$ .



# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

## Приклад 18

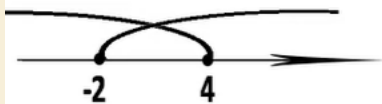
Розв'язування найпростіших нерівностей з модулем :



Наприклад:

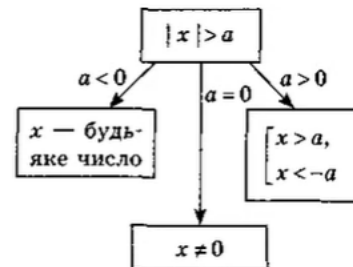
$$|x - 1| < 3;$$

$$\begin{cases} x - 1 < 3, \\ x - 1 > -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x > -2. \end{cases}$$



Відповідь:

$$x \in (-2; 4).$$



Наприклад:

$$|x - 1| > 3;$$

$$\begin{cases} x - 1 > 3, \\ x - 1 < -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < -2. \end{cases}$$

Відповідь:  $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty).$

## Приклад 19

При яких значеннях  $a$  корені рівняння  $x^2 - (4a - 2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$  належать проміжку  $[-2; 8]$ ?

**Розв'язування:** Знаходимо дискримінант

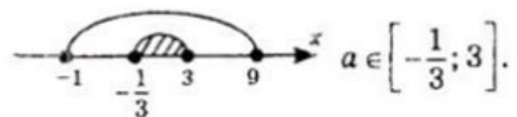
$$D = (4a + 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3a^2 - 4a + 1) = 16a^2 - 16a + 4 - 12a^2 + 16a - 4 = 4a^2 \quad \text{Тоді корені рівняння:}$$

$$x_1 = \frac{4a - 2 + 2a}{2} = \frac{6a - 2}{2} = \frac{2(3a - 1)}{2} = 3a - 1$$

$$x_2 = \frac{4a - 2 - 2a}{2} = \frac{2a - 2}{2} = \frac{2(a - 1)}{2} = a - 1$$

За умовою складемо і розв'яжемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} -2 \leq 3a - 1 \leq 8, \\ -2 \leq a - 1 \leq 8; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq 3a \leq 9, \\ -1 \leq a \leq 9; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq a \leq 3, \\ -1 \leq a \leq 9. \end{cases}$$



Розглянемо випадок, коли  $D = 4a^2 = 0$  тоді  $a = 0$

$$x^2 + 2x + 1 = 0; (x + 1)^2 = 0;$$

$x = -1$  - це число належить проміжку  $[-2; 8]$ .

**Відповідь:** корені даного рівняння належать проміжку  $[-2; 8]$  при  $-\frac{1}{3} \leq a \leq 3$

# ВІДЕО БЛОК

Все про системи  
лінійних рівнянь

<https://www.youtube.c>

Рівняння та їх системи

<https://www.youtube.com/watch?>

Системи лінійних  
нерівностей з однією  
змінною

[https://www.youtube.com/  
watch?v=NVViiKtX4xE](https://www.youtube.com/watch?v=NVViiKtX4xE)

**Скористайтесь  
порадами з  
відео розбору  
завдань!**



# ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас скористатися  
онлайн-тренажерами для  
ефективної підготовки до НМТ  
з математики — тренуйтеся,  
перевіряйте знання та  
впевнено йдіть до мети!**

## Системи нерівностей

[https://www.freetutor.com.  
ua/Math/Check\\_yourself\\_Sy  
stems\\_of\\_inequalities](https://www.freetutor.com.ua/Math/Check_yourself_Systems_of_inequalities)



## Тест – Числові проміжки. Нерівності. Лінійні нерівності. Системи нерівностей – НМТ 2024

<https://mathema.me/testy/algebra/klas-9/chyslovi-promizhky-nerivnosti-liniini-nerivnosti-systemy-nerivnostei/>

Показникові, логарифмічні  
рівняння та системи рівнянь

[https://zno.osvita.ua/mathematic  
s/tag-  
pokaznykovi\\_logharyfmichni\\_ri  
vnjannja\\_ta\\_systemy\\_rivnjan/](https://zno.osvita.ua/mathematics/tag-pokaznykovi-logharyfmichni-ri-vnjannja-ta-systemy-rivnjan/)

# САМОСТІЙНИЙ БЛОК

## № 1

Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 2x + 5y = 5, \\ x - 2y = 7. \end{cases}$  Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи знайдіть суму  $(x_0 + y_0)$ .

| А   | Б | В | Г | Д  |
|-----|---|---|---|----|
| -18 | 3 | 4 | 8 | 12 |

## № 2

Скільки всього розв'язків має система рівнянь  $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ x^2 + y^2 = 3? \end{cases}$

| А       | Б    | В   | Г   | Д            |
|---------|------|-----|-----|--------------|
| жодного | один | два | три | більше трьох |

## № 3

Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 3y + 2^x = -13, \\ 2^x - y = 15. \end{cases}$  Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок цієї системи, то  $x_0 + y_0 =$

| А  | Б  | В | Г | Д  |
|----|----|---|---|----|
| -4 | -3 | 1 | 5 | 15 |





# САМОСТІЙНИЙ БЛОК

## № 4

Розв'яжіть нерівність  $\log_{0,7}(x^2 - 2x - 3) \leq \log_{0,7}(9 - x)$ .

Вкажіть суму натуральних компонентів розв'язку.

| А  | Б  | В | Г | Д  |
|----|----|---|---|----|
| 13 | 30 | 4 | 9 | 10 |

## № 5

Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} y - x = 9, \\ \frac{x + 8}{2y - 5} = 2. \end{cases}$  Запишіть у відповідь добуток  $x_0 \cdot y_0$ , якщо пара  $(x_0; y_0)$  є розв'язком цієї системи рівнянь.

## № 6

Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} \sqrt{y - 7x + 33} = x, \\ 4x - y = 5. \end{cases}$

Якщо система має єдиний розв'язок  $(x_0; y_0)$ , то у відповіді запишіть добуток  $x_0 \cdot y_0$ . Якщо система має два розв'язки  $(x_1; y_1)$  та  $(x_2; y_2)$ , то у відповіді запишіть найбільший з добутків  $x_1 \cdot y_1$  та  $x_2 \cdot y_2$ .

## № 7

Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 3^{x-2y} = \frac{1}{3}, \\ 3^x + 3^{2y} = 4\sqrt{3}. \end{cases}$

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи обчисліть ДОБУТОК  $x_0 \cdot y_0$ .

# САМОСТІЙНИЙ БЛОК

## № 8

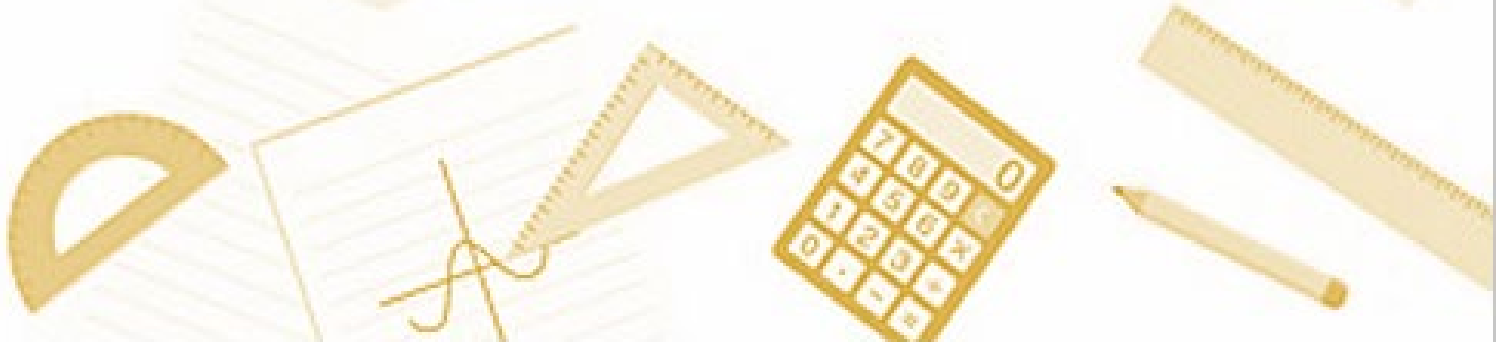
4 кг огірків і 5 кг помідорів коштували 44 гривні. Після того як огірки подорожчали на 50%, а помідори подешевшали на 40%, за 4 кг огірків і 5 кг помідорів заплатили 39 гривень. Знайдіть початкову вартість  $x$  одного кілограма огірків і початкову вартість  $y$  одного кілограма помідорів. У відповідь запишіть суму  $x + y$  (у грн).

## № 9

Розв'язати нерівність  $|2x - 3| > 5$

## № 10

Розв'яжіть систему  $\begin{cases} y + x = 3, \\ x^2 + 4 = 8y. \end{cases}$  Якщо пара  $(x_0; y_0)$  є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь, то запишіть у відповідь добуток  $x_0 \cdot y_0$ . Якщо пари  $(x_1; y_1)$  та  $(x_2; y_2)$  є розв'язками цієї системи рівнянь, то запишіть у відповідь *найменший* із добутків  $x_1 \cdot y_1$  та  $x_2 \cdot y_2$ .



# ВІДПОВІДІ

| № завдання | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|---|---|---|---|
| Відповідь  | В | А | А | Б |

5) -18;

6) 44;

7) 0,375;

8) 9,5;

9)  $(-\infty; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$

10) -130

