

ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА
З ТЕМИ:
“ Тригонометричні
рівняння”.

Укладач: Гончарова Марина Леонідівна
Слов'янський ЗЗСО І-ІІІ ступенів №4



Тригонометричне рівняння — рівняння, що містить невідоме під знаком тригонометричної функції.

Рівняння виду $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ називають найпростішими тригонометричними рівняннями.

НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Рівняння	Формула коренів	Примітки
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$\arcsin(-a) = -\arcsin a$, $ a \leq 1$, $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, $ a \leq 1$, $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$	$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

Формули для знаходження найпростіших тригонометричних рівнянь (окремі випадки)

$$\sin x = a \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \quad x = \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1 \quad x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi k$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad x = \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = -1 \quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \quad x = \frac{5\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad x = \frac{2\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

Алгоритм рішення тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших:

- 1. Намагаємося звести всі функції до одного аргументу.**
- 2. Якщо вийшло звести всі функції до одного аргументу, то пробуємо звести до однієї тригонометричної функції.**
- 3. Якщо вийшло звести всі функції до одного аргументу, а звести до однієї тригонометричної функції немає, то намагаємося звести рівняння до однорідного.**
- 4. В інших випадках переносимо всі члени рівняння в ліву частину і розкладаємо на множники.**
- 5. У складних випадках використовуємо спеціальні прийоми рішення, штучні способи.**



ВІДЕО БЛОК



**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



Практичний блок

$$\sin^2 x + \sin x = 0$$

Розв'язання	Коментар
Виконаємо заміну $\sin x = t$, где $t \leq 1$, тоді $t^2 + t = 0,$ $t(t + 1) = 0,$ $t = 0 \text{ або } t + 1 = 0,$ $t = -1.$ $t_1 = 0; t_2 = -1.$ Виконаємо зворотну заміну: 1) $t_1 = 0, \sin x = 0,$ $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ 2) $t_2 = -1, \sin x = -1,$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pi n, n \in \mathbb{Z}.$	В рівнянні $\sin^2 x + \sin x = 0$ змінна входить в одному і тому ж вигляді $\sin x$, тому зручно виконати заміну $\sin x = t$, де $t \leq 1$. Тепер рішення тригонометричного рівняння звелось до вирішення алгебраїчного (квадратного) рівняння $t^2 + t = 0$.

$$\cos^2 x = \cos x + 2$$

Розв'язання	Коментар
$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0.$ Виконаємо заміну $\cos x = t$, где $t \leq 1$ $t^2 - t - 2 = 0,$ За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 1, \\ t_1 \cdot t_2 = -2; \end{cases} \text{ тому } t_1 = -1, t_2 = 2.$ $t_2 = 2$ сторонній корінь, не задовольняє умові $t \leq 1$. Виконаємо зворотну заміну: $t_1 = -1, \cos x = -1,$ $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$ Відповідь: $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$	Зручно виконати заміну $\cos x = t$, где $t \leq 1$ і вирішити квадратне рівняння.

$$\operatorname{tg}^2 x = 4 \operatorname{tg} x - 3$$

Розв'язання	Коментар
$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$ Нехай $\operatorname{tg} x = t$, де $t \in \mathbb{R}$, тоді. $t^2 - 4t + 3 = 0$ За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4, \\ t_1 \cdot t_2 = 3; \end{cases} \text{ звідси } t_1 = 1, t_2 = 3.$ Виконаємо зворотну заміну: 1) $t_1 = 1, \operatorname{tg} x = 1,$ $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z},$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ 2) $t_2 = 3, \operatorname{tg} x = 3,$ $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ $\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$	Зручно виконати заміну $\operatorname{tg} x = t$, де $t \in \mathbb{R}$ і вирішити квадратне рівняння.

Практичний блок

$$2\cos^2 2x = \cos 2x$$

Розв'язання	Коментар
$2\cos^2 2x - \cos 2x = 0.$ Нехай $\cos 2x = t$, де $ t \leq 1$. Тоді рівняння набуває вигляду $2t^2 - t = 0,$ $t(2t - 1) = 0.$ Звідси $t = 0$ або $2t - 1 = 0,$ $t = \frac{1}{2}.$ $t_1 = 0; t_2 = \frac{1}{2}.$ Виконаємо зворотну заміну: 1) $t_1 = 0, \cos 2x = 0,$ $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$ 2) $t_2 = \frac{1}{2}, \cos 2x = \frac{1}{2}$ $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$ $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$	Виконуємо заміну $\cos 2x = t$, де $ t \leq 1$ і розв'язуємо квадратне рівняння.

$$\sin^2 2x + 2 = 3 \sin 2x.$$

Розв'язання	Коментар
$\sin^2 2x - 3 \sin 2x + 2 = 0,$ Нехай $\sin 2x = t$, де $ t \leq 1$. Тоді рівняння набуває вигляду $t^2 - 3t + 2 = 0,$ За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3, \\ t_1 \cdot t_2 = 2; \end{cases}$ звідси $t_1 = 1, t_2 = 2.$ $t_2 = 2$ – сторонній корінь, не задовольняє умові $ t \leq 1$. Виконаємо зворотну заміну: 1) $t_1 = 1, \sin 2x = 1,$ $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$	Виконуємо заміну $\sin 2x = t$, де $ t \leq 1$ і розв'язуємо квадратне рівняння.

Практичний блок

$$2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Розв'язання	Коментар
$2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0$ $2 - 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ Виконаємо заміну $\cos x = t$, де $ t \leq 1$, тоді $2t^2 - t - 1 = 0$ $D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$ $t_1 = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{1 + 3}{4} = 1$. Повертаємося до попередньої змінної: 1) $t_1 = -\frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 2) $t_2 = 1$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Відповідь: $\pm \frac{2\pi}{3} + \pi n$; $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	Враховуємо, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, замінюємо $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$. В отриманому рівнянні $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ Змінна входить в вигляді $\cos x$, тому зручно виконати заміну $\cos x = t$, де $ t \leq 1$. Отже розв'язання тригонометричного рівняння зводиться до розв'язку алгебраїчного (квадратного) рівняння $2t^2 - t - 1 = 0$.

$$3 \cos^2 x + 7 \sin x + 3 = 0$$

Розв'язання	Коментар
$3(1 - \sin^2 x) + 7 \sin x + 3 = 0$ $3 - 3 \sin^2 x + 7 \sin x + 3 = 0$ $-3 \sin^2 x + 7 \sin x + 6 = 0$ $3 \sin^2 x - 7 \sin x - 6 = 0$, Виконуємо заміну: $\sin x = t$, де $ t \leq 1$. $3t^2 - 7t - 6 = 0$, $D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 49 + 72 = 121$ $t_1 = \frac{7 - 11}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{7 + 11}{6} = \frac{18}{6} = 3$. Повертаємося до попередньої змінної: $t_1 = -\frac{2}{3}$, $\sin x = -\frac{2}{3}$, $t_2 = 3$, рівняння $\sin x = 3$ не має коренів. Отже, $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Відповідь: $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.	Враховуємо, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, замінюємо $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$. Виконуємо заміну $\sin x = t$, де $ t \leq 1$. Розв'язуємо квадратне рівняння. Арксинус – непарна функція.

Практичний блок

$$\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} - 4 = 0.$$

Розв'язання	Коментар
Нехай $\operatorname{tg} x = t$, де $t \neq 0$, Маємо $t + \frac{3}{t} - 4 = 0$. Помножимо всі частини рівняння на $t \neq 0$. Отримаємо квадратне рівняння $t^2 + 3 - 4t = 0$, $t^2 - 4t + 3 = 0$ За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4, \\ t_1 \cdot t_2 = 3; \end{cases}$ тоді $t_1 = 1$ або $t_2 = 3$. Отримуємо, що дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь: $\operatorname{tg} x = 1$ або $\operatorname{tg} x = 3$. Звідси 1) $t_1 = 1$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 2) $t_2 = 3$, $\operatorname{tg} x = 3$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg}(3) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.	Враховуємо, що $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, замінюємо $\operatorname{ctg} x$ на $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Виконуємо заміну $\operatorname{tg} x = t$, де $t \neq 0$. Розв'язуємо квадратне рівняння.

$$\cos 2x - 5 \cos x - 2 = 0$$

Розв'язання	Коментар
$\cos^2 x - \sin^2 x - 5 \cos x - 2 = 0$ $2 \cos^2 x - 1 - 5 \cos x - 2 = 0$ $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$ Нехай $\cos x = t$, де $ t \leq 1$, маємо $2t^2 - 5t - 3 = 0$, $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$, $t_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$ - не задовольняє умові $ t \leq 1$ Повертаємося до старої змінної: $t = -\frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Відповідь: $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Виконуємо заміну $\cos x = t$, де $ t \leq 1$. Розв'язуємо квадратне рівняння.

$$\cos^2 x + 4 \sin x = -4$$

$[-\pi; \pi]$?

Розв'язання	Коментар
$1 - \sin^2 x + 4 \sin x + 4 = 0$ $-\sin^2 x + 4 \sin x + 5 = 0$ $\sin^2 x - 4 \sin x - 5 = 0$ Нехай $\sin x = t$, де $ t \leq 1$, тоді $t^2 - 4t - 5 = 0$ За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 \cdot t_2 = -5 \end{cases}$ тогда $t_1 = -1$ або $t_2 = 5$. Корінь $t_2 = 5$ не задовольняє умові $ t \leq 1$ Повертаємося до старої змінної: $t = -1$, $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. при $n = 0, x = -\frac{\pi}{2}$ -єдиний корінь рівняння, який належить відрізку $[-\pi; \pi]$, тому що при $n = 1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$, при $n = -1, x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$ не належать відрізку $[-\pi; \pi]$ Відповідь: один корінь.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, тому $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Виконуємо заміну $\sin x = t$, де $ t \leq 1$. Розв'язуємо квадратне рівняння.

Однорідні тригонометричні рівняння

1. Однорідні рівняння першого ступеня

Рівняння виду $a \sin x + b \cos x = 0$ називають однорідним тригонометричним рівнянням першого ступеня, де a і b не рівні нулю, так як всі його члени мають однаковий ступінь 1. Значення x , при яких $\cos x$ буде дорівнює нулю, не задовольняють даному рівнянню, так як тоді і $\sin x$ теж був би рівний нулю, а $\cos x$ и $\sin x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю (оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Тому таке рівняння можна вирішити розподілом обох частин рівняння на $\cos x \neq 0$ або на $\sin x \neq 0$. Розділимо обидві частини даного рівняння на $\cos x \neq 0$ і отримаємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\begin{aligned} \frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} &= 0, \\ \text{враховуючи що } \frac{\sin x}{\cos x} &= \operatorname{tg} x \text{ отримуємо} \\ a \operatorname{tg} x + b &= 0, \\ \operatorname{tg} x &= -\frac{b}{a}, \\ x &= -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Приклад 11. Розв'яжіть рівняння $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$.

Розв'язання	Коментар
$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sqrt{3} \cos x}{\cos x} = 0;$ $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0,$ $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}.$ $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z},$ $x = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$	При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos x \neq 0$. Враховуємо, що $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x; \frac{\sqrt{3} \cos x}{\cos x} = \sqrt{3}$ Арктангенс – непарна функція

Відповідь: $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Практичний блок

Приклад 12. Розв'яжіть рівняння $7 \sin x = 13 \cos x$.

Розв'язання	Коментар
$\frac{7 \sin x}{\cos x} = \frac{13 \cos x}{\cos x},$ $7 \operatorname{tg} x = 13,$ $\operatorname{tg} x = \frac{13}{7}.$ $x = \operatorname{arctg} \frac{13}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos x \neq 0$. Враховуємо, що $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, \text{ тоді } \frac{7 \sin x}{\cos x} = 7 \operatorname{tg} x;$ $\frac{13 \cos x}{\cos x} = 13$

Відповідь: $\operatorname{arctg} \frac{13}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Приклад 13. Розв'яжіть рівняння $3 \sin 2x - 2 \cos 2x = 0$.

Розв'язання	Коментар
$\frac{3 \sin 2x}{\cos 2x} - \frac{2 \cos 2x}{\cos 2x} = 0;$ $3 \operatorname{tg} 2x - 2 = 0;$ $\operatorname{tg} 2x = \frac{2}{3};$ $2x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	При $\cos 2x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos 2x \neq 0$. Враховуємо, що $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x$, тоді $\frac{3 \sin 2x}{\cos 2x} = 3 \operatorname{tg} 2x$; $\frac{2 \cos 2x}{\cos 2x} = 2$

Відповідь: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Практичний блок

2. Однорідні рівняння другого ступеня

Рівняння виду $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ називають однорідним рівнянням другого ступеня, де a і b не рівні нулю, так як всі його члени мають однакову сумарну ступінь 2.

Розглянемо випадки.

I. $a \neq 0$. $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

Таке рівняння можна вирішити поділивши обидві частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$ або на $\sin^2 x \neq 0$. Значення x , при яких $\cos x$ буде дорівнює нулю, не задовольняють даному рівнянню, так як тоді й $\sin x$ теж був би рівний нулю, а, як було сказано раніше, $\cos x$ і $\sin x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю (оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Тому в даному рівнянні розділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$. Отримаємо рівняння, рівносильне заданому.

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$
$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0.$$

Вирішивши отримане рівняння, отримаємо коріння даного рівняння.

II. $a = 0$.

Тоді рівняння набуде вигляду $b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$.

Застосуємо метод розкладання на множники. Винесемо $\cos x$ за дужку і отримаємо: $\cos x (b \sin x + c \cos x) = 0$.

Звідки $\cos x = 0$ або $b \sin x + c \cos x = 0$.

А ці два рівняння ми вже вміємо вирішувати.

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) $b \sin x + c \cos x = 0$,

При $\cos x = 0$ рівняння $b \sin x + c \cos x = 0$ не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos x \neq 0$. Враховуємо, що

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x,$$
$$\text{тоді } \frac{b \sin x}{\cos x} = b \tan x; \quad \frac{c \cos x}{\cos x} = c.$$

Таким чином, отримуємо рівняння $b \tan x + c = 0$, $\tan x = -\frac{c}{b}$.

Отримане рівняння має рішення при будь-якому значенні виразу $-\frac{c}{b}$ і це рішення має вигляд $x = \arctan\left(-\frac{c}{b}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Практичний блок

III. $c = 0$.

Тоді рівняння набуде вигляду $a \sin^2 x + b \sin x \cos x = 0$

Це рівняння (як і у випадку II. $a = 0$) вирішується методом розкладання на множники.

IV. Для вирішення рівняння виду

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

замінімо d таким чином: $d = d \cdot 1 = d(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$,

де $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ і отримаємо однорідне тригонометричне рівняння другого порядку.

Приклад 14. Розв'яжіть рівняння $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

Розв'язання	Коментар
$3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ $\frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$ $\frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4 \sin x}{\cos x} + 1 = 0.$ Тоді $3 \tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0$ Заміна: $\tan x = t \in \mathbb{R}$. Отримаємо рівняння: $3t^2 - 4t + 1 = 0$ $D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4;$ $t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 - 2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$ $t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 + 2}{6} = \frac{6}{6} = 1.$ Виконуємо зворотну заміну: 1) При $t = 1$ маємо $\tan x = 1,$ $x = \arctan 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z},$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ 2) При $t = \frac{1}{3}$ маємо $\tan x = \frac{1}{3},$ $x = \arctan \frac{1}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$	При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos^2 x \neq 0.$ Враховуємо, що $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x;$ $\frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} = 3 \tan^2 x;$ $\frac{4 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{4 \sin x}{\cos x} = 4 \tan x;$ $\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1. \checkmark$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \arctan \frac{1}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$

ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК



**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



Let's Start!



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

1. Розв'яжіть рівняння $\cos^2 x + \cos x = 0$

А.	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
Б.	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
В.	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$
Г.	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
Д.	$2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

2. Розв'яжіть рівняння $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$

А.	$2\pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
Б.	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
В.	$-\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
Г.	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
Д.	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg}^2 2x - 6 \operatorname{ctg} 2x + 5 = 0$.

А.	$-\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} 5 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
Б.	$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad 2 \operatorname{arccctg} 5 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
В.	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} 5 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$
Г.	$-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} 5 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$
Д.	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad 2 \operatorname{arccctg} 5 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

4. Розв'яжіть рівняння $2 \sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} + 1 = 0$.

А.	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$
Б.	$\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
В.	$\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
Г.	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
Д.	$2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

5. Розв'яжіть рівняння $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$.

А.	$\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Б.	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
В.	$(-1)^n \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Г.	$\pm 5 \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

6. Розв'яжіть рівняння $5 \cos^2 x + 6 \sin x - 6 = 0$

А.	$\pi n, n \in Z$ $(-1)^n \arcsin \frac{1}{5} + \pi n$
Б.	$2\pi n, n \in Z$ $\pm \arcsin \frac{1}{5} + \pi n$
В.	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\arcsin \frac{1}{5} + \pi n$
Г.	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $(-1)^n \arcsin \frac{1}{5} + \pi n$

7. Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{x}{4} - \frac{4}{\operatorname{tg} \frac{x}{4}} = 3$

А.	$-\frac{\pi}{4} + \pi n;$ $\operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in Z$
Б.	$-\pi + 4\pi n, n \in Z$ $4\operatorname{arctg} 4 + 4\pi n, n \in Z$
В.	$\frac{\pi}{4} + \pi n;$ $-\operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in Z$
Г.	$\pi + 4\pi n;$ $-4\operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in Z$

8. Розв'яжіть рівняння $4 \sin 3x + \cos^2 3x = 4$

А.	$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$
Б.	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $(1)^n \arcsin 3 + \pi n, n \in Z$
В.	$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
Г.	$\frac{2\pi n}{3}, n \in Z$

9. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$.

А.	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$
Б.	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$
В.	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$
Г.	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

10. Розв'яжіть рівняння $2 \sin 3x - 5 \cos 3x = 0$.

А.	$x = \frac{1}{3} \arctg \frac{5}{2} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$
Б.	$x = -\frac{1}{3} \arctg \frac{5}{2} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$
В.	$x = \arctg \frac{2}{5} + \pi n, n \in Z$
Г.	$x = -\arctg \frac{2}{5} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

11. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0$.

12. Розв'яжіть рівняння $5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 = 0$.