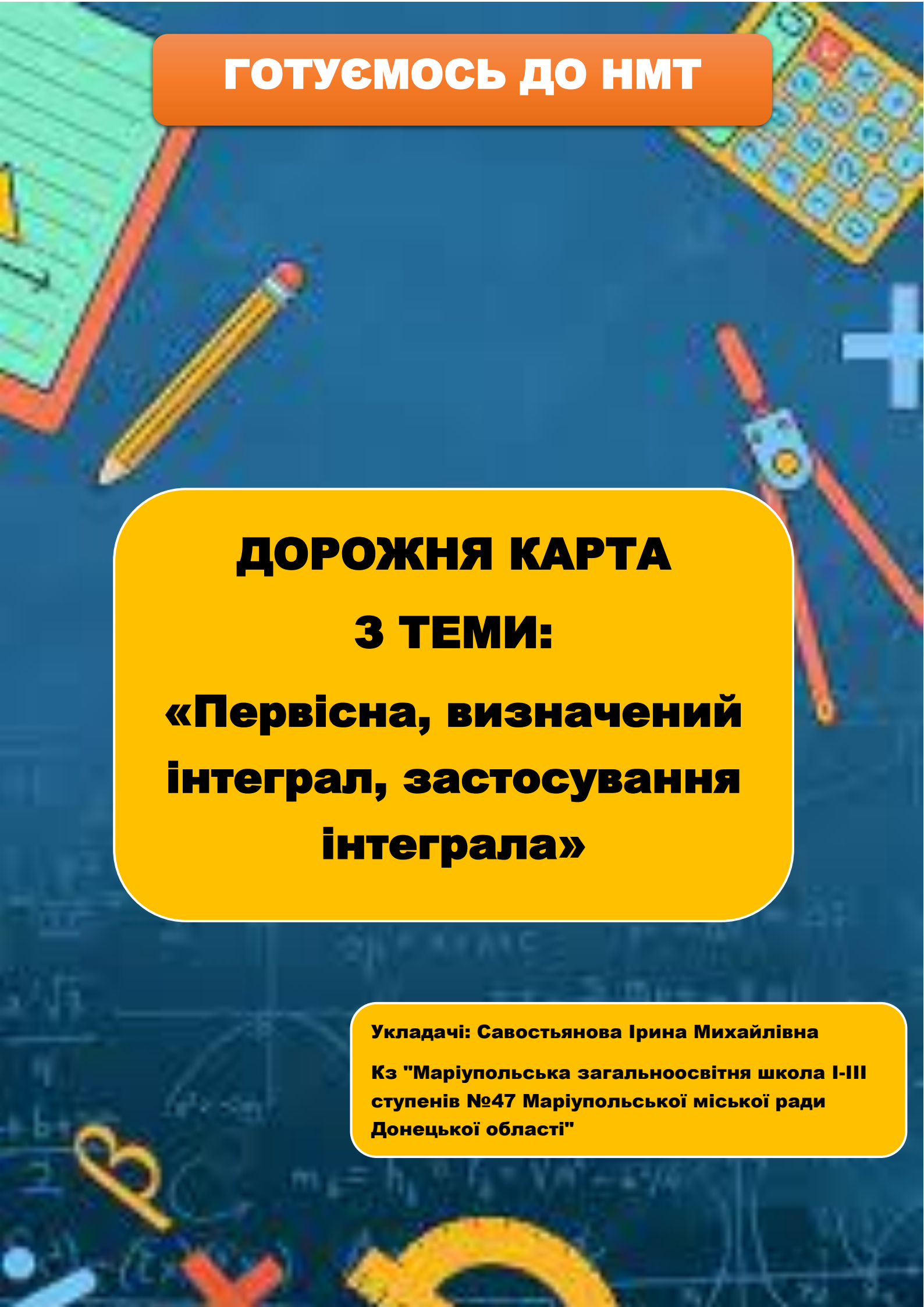




ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА
З ТЕМИ:
«Первісна, визначений
інтеграл, застосування
інтеграла»

Укладачі: Савостьянова Ірина Михайлівна

**Кз "Маріупольська загальноосвітня школа І-ІІІ
ступенів №47 Маріупольської міської ради
Донецької області"**

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Означення 0.1. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку виконується умова

$$F'(x) = f(x).$$

Означення 0.2. Множина всіх первісних функцій для функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом і позначається

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Тут C — довільна стала, яка називається сталою інтегрування.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x),$
2. $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x)dx,$
3. $\int F'(x) dx = F(x) + C,$
4. $\int dF(x) = F(x) + C,$
5. $\int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx, \quad A = \text{const},$
6. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$



THEORY

Таблиця інтегралів

$$1. \int dx = x + C.$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$3. \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C.$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$9. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$10. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad (\text{метод заміни змінних, метод підстановки})$$

$$\int u dv = u \cdot v + \int v du \quad (\text{інтегрування частинами})$$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Означення

Нехай F – первісна функції f на проміжку I , числа a і b ($a < b$), належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Використовуючи теорему про площу криволінійної трапеції та формулу Ньютона-Лейбніца можна зробити висновок, що площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислювати за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Формула Ньютона – Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ визначена та неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ — будь-як первісна для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$



THEORY

основні властивості інтеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx .$$

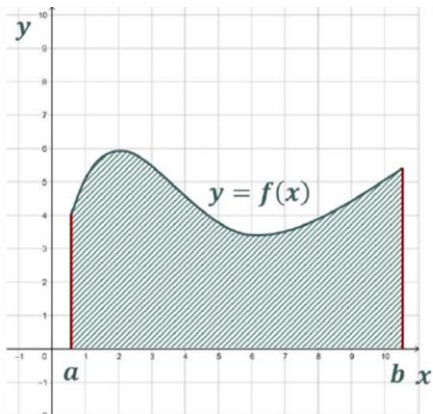
$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, k \in R.$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$$

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a; b]$ і $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

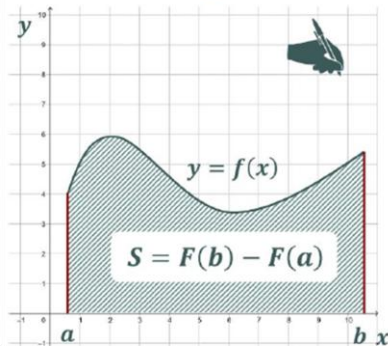


Означення

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і $y = f(x) \geq 0$, то фігура, обмежена графіком функції f і прямими $y = 0, x = a$ і $x = b$, називається **криволінійною трапецією**.

*Відрізок $[a; b]$ – це основа криволінійної трапеції.

Площа криволінійної трапеції

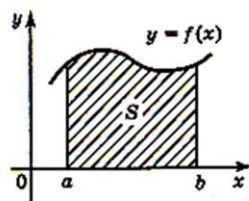


Теорема

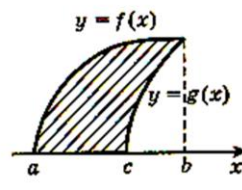
Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0, x = a$ і $x = b$ ($a < b$), можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$



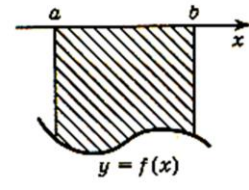
площа плоскої фігури



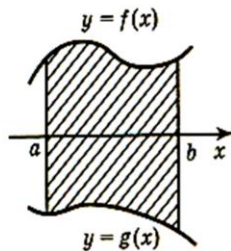
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



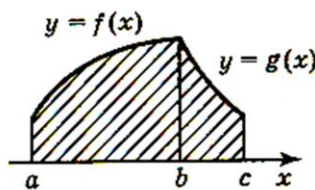
$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b g(x) dx$$



$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

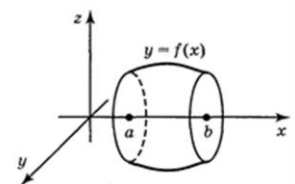


$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

об'єм тіла



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

1. Знайдіть усі первісні для функції:

$$1) f(x) = x^6; \quad 2) f(x) = \frac{1}{x^4};$$

$$1) F(x) = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C; F(x) = \frac{x^7}{7} + C.$$

$$f(x) = x^{-4}, \text{ то } F(x) = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C; F(x) = \frac{x-3}{-3} + C; F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

$$3) f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad 4) f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \text{ то } F(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C, F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C; F(x) = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$$

$$f(x) = x^{-\frac{4}{5}}, \text{ тоді } F(x) = \frac{x^{-\frac{4}{5}+1}}{-\frac{4}{5}+1} + C; F(x) = 5x^{\frac{1}{5}} + C; F(x) = 5\sqrt[5]{x} + C.$$

2. Знайти первісну функції $f(x) = 3x^2$, графік якої проходить через точку $(2; 10)$.

Оскільки $(x^3)' = 3x^2$, то загальний вигляд первісної є $F(x) = x^3 + C$. Знайдемо значення C . За умовою, $F(2) = 10$. Тому $2^3 + C = 10$; $C = 2$. Таким чином, первісна функції $f(x) = 3x^2$, яка проходить через точку $(2; 10)$, має вигляд $F(x) = x^3 + 2$.

3. Приклади безпосереднього інтегрування (за таблицею та основними правилами інтегрування):

Знайти невизначений інтеграл: а) $\int (4x^3 - 6) dx$; б) $\int \left(3 \cos x + \frac{10}{x} \right) dx$.

$$\text{а) } \int (4x^3 - 6) dx = 4 \int x^3 dx - 6 \int dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot x + C = x^4 - 6x + C.$$

$$\text{б) } \int \left(3 \cos x + \frac{10}{x} \right) dx = 3 \int \cos x dx + 10 \int \frac{dx}{x} = 3 \sin x + 10 \ln|x| + C.$$

Знайти невизначений інтеграл $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

$$\text{Врахуємо, що } \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}. \text{ Тоді } \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C.$$

4. Приклад (метод заміни змінних, метод підстановки)

Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{x^2 + 3x + 1} (2x + 3) dx$.

Використаємо метод заміни змінної, позначивши $t = x^2 + 3x + 1$, звідки $t' = 2x + 3$. Тоді

$$\int \sqrt{x^2 + 3x + 1} (2x + 3) dx = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (x^2 + 3x + 1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

5. Приклад інтегрування частинами

Знайти невизначений інтеграл $\int x \sin x dx$.

Проінтегруємо частинами, припустивши, що $u = x$, $v' = \sin x$. Тоді $u' = 1$, $v = -\cos x$. Маємо:

$$\int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

6. Обчислити інтеграли 1) $\int_0^5 (x^2 - 3x) dx$. 2) $\int_1^2 (5x + 1)^2 dx$. 3) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x dx$.

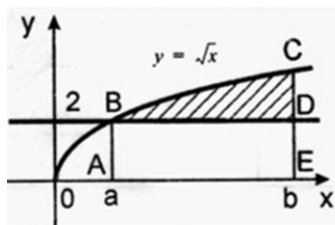
$$\int_0^5 (x^2 - 3x) dx = \int_0^5 x^2 dx - \int_0^5 3x dx = \int_0^5 x^2 dx - 3 \int_0^5 x dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^5 - 3 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3} - 3 \left(\frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{125}{3} - 3 \cdot \frac{25}{2} = \frac{125}{3} - \frac{75}{2} = \frac{250 - 225}{6} = \frac{25}{6} = 4 \frac{1}{6}.$$

$$\int_1^2 (5x + 1)^2 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x + 1)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{15} ((5 \cdot 2 + 1)^3 - (5 \cdot 1 + 1)^3) = \frac{1}{15} (11^3 - 6^3) = \frac{1}{15} \cdot 1115 = \frac{223}{3} = 74 \frac{1}{3}.$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x dx = \frac{1}{2} (-\cos 2x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

7. Обчислити площу даної фігури: 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$. 2) $f(x) = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$.



1. Будуємо графік заданої функції та відмічаємо фігуру, площу якої треба знайти.

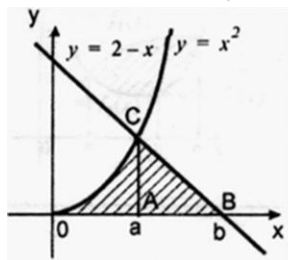
2. Напишемо формулу для обчислення площі шуканої фігури:

$$S = S_{ABCDE} - S_{ABDE} = \int_a^b \sqrt{x} dx - \int_a^b 2 dx;$$

3. Знаходимо межі інтегрування: $\begin{cases} y = \sqrt{x}; & \sqrt{x} = 2; & a = 4; \\ y = 2. & x = 4; & b = 9. \end{cases}$

4. Обчислюємо шукану площу за формулою:

$$S = \int_4^9 (\sqrt{x} - 2) dx = \left(\frac{2x\sqrt{x}}{3} - 2x \right) \Big|_4^9 = \left(\frac{2 \cdot 9 \cdot 3}{3} - 18 \right) - \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3} - 8 \right) = 18 - 18 - \frac{16}{3} + 8 = 8 - 5 \frac{1}{3} = 2 \frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}$$



1. Будуємо графік заданої функції та відмічаємо фігуру, площу якої треба знайти.

2. Напишемо формулу для обчислення площі шуканої фігури:

$$S = S_{OCA} + S_{ABC} = \int_0^a x^2 dx + \int_a^b (2 - x) dx;$$

3. Знаходимо межі інтегрування:

$$\begin{cases} y = x^2; & 2 - x = x^2; & x_1 = 1; x_2 = -2; \\ y = 2 - x. & x^2 + x - 2 = 0; & a = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - x; & 2 - x = 0; \\ y = 0. & x = 2; & b = 2. \end{cases}$$

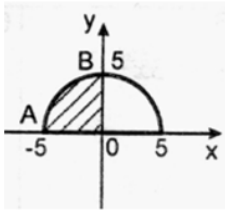
4. Обчислюємо шукану площу за формулою:

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2 \cdot 9 \cdot 3}{3} - 18 \right) - \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3} - 8 \right) = \frac{1}{3} - 0 + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

8. Використовуючи геометричний зміст інтеграла обчислити:

$$\int_{-5}^0 \sqrt{25-x^2} dx.$$



Розглянемо функцію і знайдемо її область визначення:

$$y = \sqrt{25-x^2} \quad 25-x^2 \geq 0; \quad -x^2 \geq -25; \quad x^2 \leq 25; \quad -5 \leq x \leq 5.$$

Отже на відрізку $[0;5]$ функція визначена і набуває невід'ємних значень.

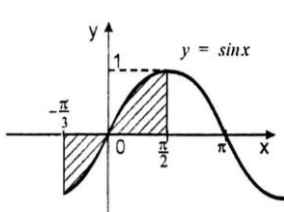
Тому значення інтеграла дорівнює площі фігури обмеженої лініями

$$y = \sqrt{25-x^2}, y=0; x=-5; x=0.$$

Якщо $y \geq 0$; $y^2 = 25 - x^2$; $x^2 + y^2 = 25$ – рівняння півкола з центром у точці $O(0;0)$ та радіусом 5.

$$\int_{-5}^0 \sqrt{25-x^2} dx = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot 25 = \frac{25\pi}{4} (\text{кв.од.})$$

9. Обчислити площу даної фігури:



$$\begin{aligned} S &= -\int_{-\pi/3}^0 \sin x dx + \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\pi/3}^0 - \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \cos 0 - \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1 - \frac{1}{2} - 0 + 1 = 1\frac{1}{2} (\text{кв.од.}); \end{aligned}$$

10. Створити дах над пісочницею, знайти яку кількість матеріалу потрібно, якщо математичною моделлю даного виробу є фігура обмежена параболою $y=x^2$, та $y=\sqrt{x}$, яка обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла, утвореного в результаті обертання цієї фігури.

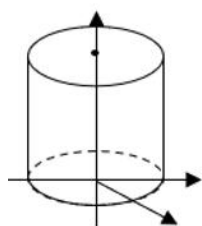
Знаходимо межі інтегрування:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \quad x^4 = x, \quad x(x-1)(x^2+x+1)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=1. \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi (\text{куб.од.})$$

11. Знайти роботу, яку необхідно витратити на викачування води з резервуара, якщо він завглибшки 2м і має форму циліндра радіуса 1м ($\rho_v=10^3 \text{ кг/м}^3$)

Спрямуємо вісь Ox вздовж діючої сили. Значення сили $F(x)$, що діє на переріз циліндра визначається вагою шару води, що знаходиться вище від цього перерізу. Отже, оскільки $S=\pi r^2=\pi$, то для $x \in [0;2]$ $F(x)=\pi \rho g(2-x)$, $g=9,8 \text{ м/с}^2$



$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

$$A = \int_0^2 \pi \rho g(2-x) dx = \pi \rho g \int_0^2 (2-x) dx =$$

$$= \pi \rho g \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \pi \rho g(4-2) = 2 \cdot 3,14 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \approx 0,62 \cdot 10^5 \text{ Дж}$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

12. Протягом 7с величина струму в провіднику змінювалась за законом $I(t)=3t^2+2t$. Знайти кількість електрики, що пройшла через провідник за цей час.

$$q = \int I(t)dt = \int_0^7 (3t^2 + 2t) = (t^3 + t^2)|_0^7 = 7^3 + 7^2 = 392 \text{ Кл}$$

13. Тіло рухається прямолінійно зі змінною швидкістю за законом $v(t)=3t^2+2t+10$ (км/год). Знайти, який шлях проходить тіло за проміжок часу $t_0=0$, $t_1=1$ год.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$
$$S = \int_0^1 (3t^2 + 2t + 10) = (t^3 + t^2 + 10t)|_0^1 = 12$$

14. Продуктивність праці робітничої бригади визначається в залежності від часу t функцією $\Pi(t)=4t^3+1$. Знайти обсяг продукції, тобто як працювали робітники за другу і третю години робочого дня.

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \Pi(t)dt$$
$$V = \int_1^3 (4t^3 + 1)dt = \left(\frac{4t^4}{4} + t\right)\Big|_1^3 = 81 + 3 - 1 - 1 = 82 \text{ од.}$$

15. Чисті інвестиції змінюються в залежності від часу t за законом $I(t)=200t(3t+2)$. Визначити приріст капіталу за 5 років. Через скільки років приріст капіталу становитиме 220000.

$$\Delta K = \int_0^5 200t(3t+2)dt = 200 \int_0^5 (3t^2 + 2t)dt = 200(t^3 + t^2)\Big|_0^5 = 200(125 + 25) = 30000$$

Для відповіді на друге питання позначимо шукану кількість років через T , тоді матимемо рівняння для його визначення:

$$\Delta K = \int_0^T 200t(3t+2)dt = 200(T^3 + T^2)$$

тобто $220000=200(T^3+T^2)$, звідси $T^3+T^2=11000$, $T=10$ років.

16. Археологи при розкопуванні стародавніх поселень знайшли жертвне місце. Після досліджень було з'ясовано, що це тіло, утворене обертанням параболи $y = -x^2 + 2x + 3$ навколо вісі Ox (x вчені вимірювали в метрах). Причому виготовлений він був з каменю густиною 2500 кг/м³. Яка масу каменю використали на виготовлення цього жертовника стародавні майстри?

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \quad V = \pi \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)^2 dx = \pi \int_0^3 (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9)dx =$$
$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{2x^3}{3} + 6x^2 + 9x \right) \Big|_0^3 = 3,14 \cdot (48,6 - 81 - 18 + 54 + 27) = 3,14 \cdot 30,6 = 96,084 \text{ (м}^3\text{)}$$

$$m = V\rho; \quad m = 96,084 \cdot 2500 = 240210 \text{ (кг)}.$$

ВІДЕО БЛОК

**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**

Первісна та її властивості

1

2

3

Таблиця первісних.
Правила знаходження
первісних

4

5

6

7

Визначений інтеграл,
його геометричний зміст

8

9

10

Обчислення площ
плоских фігур

11

12

13

14



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



первісна



невизначений інтеграл



визначений інтеграл



площі плоских фігур



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

Для функції $f(x) = \sin x$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку $O(0; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \sin x$	$F(x) = \cos x$	$F(x) = \cos x + 1$	$F(x) = 1 - \cos x$	$F(x) = \cos x - 1$

Обчислити інтеграл $\int_0^1 x^{20} dx$.

А	Б	В	Г	Д
19	21	20	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{21}$

Обчислити $\int_0^1 (x^2 - 4x) dx$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	$-\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$

$\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$2 \cos x \Big _0^{\pi}$	$-\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \Big _0^{\pi}$	$\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \Big _0^{\pi}$	$-2 \cos \frac{x}{2} \Big _0^{\pi}$	$2 \cos \frac{x}{2} \Big _0^{\pi}$

Обчислити: $80(\sqrt{3} + 1) \int_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{10}} \sin \left(10x + \frac{\pi}{3} \right) dx$.

А	Б	В	Г	Д
0,8	$\frac{1-\sqrt{3}}{20}$	-0,8	8	-8

Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 2t + 1$. Знайти закон руху тіла $S(t)$, якщо $S(1) = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$S(t) = t^2 + t + 3$	$S(t) = t^2 + t$	$S(t) = t^2 + t + 1$	$S(t) = t^2 + t + 2$	$S(t) = t^2 + t - 1$

Вказати інтеграл для обчислення площі фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$ і $x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^4 x^2 dx$	$\int_0^2 (x^2 - x) dx$	$\int_0^2 2x dx$	$\int_0^2 \frac{x^3}{3} dx$	$\int_0^2 x^2 dx$

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

Вказати формулу для обчислення площі S фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = x$.

А	Б	В	Г	Д
$S = \int_0^1 (x^2 - x) dx$	$S = \int_0^1 (x^2 + x) dx$	$S = \int_0^1 (x - x^2) dx$	$S = \int_0^1 x^2 dx$	$S = \int_0^1 x dx$

Обчислити інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

А	Б	В	Г	Д
3	1,5	6	2	0,75

Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчислити $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$.

А	Б	В	Г	Д
8	16	8π	16π	32π

Вказати формулу для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, утвореної лініями $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$V = \pi \sin x \Big _{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V = \pi \cos x \Big _{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V = \frac{\pi}{2\sqrt{\cos x}} \Big _{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V = \pi \sqrt{\cos x} \Big _{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V = \pi \sqrt{\sin x} \Big _{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

Вказати первісну функцію для функції $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

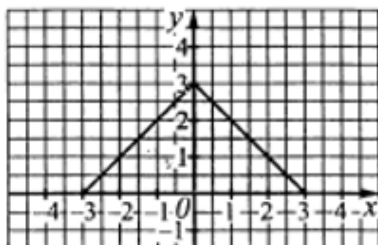
А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \operatorname{ctg}^2 x + C$	$F(x) = \operatorname{tg} x - x$	$F(x) = \operatorname{ctg} x - x$	$F(x) = \operatorname{ctg} x + x$	$F(x) = \operatorname{tg} x + x$

Обчислити інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx$.

А	Б	В	Г	Д
-4π	4π	-2π	2π	0

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

Вказати формулу для обчислення площі трикутника, заштрихованого на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$S = \int_{-3}^3 (x - 3) dx$	$S = \int_{-3}^3 (x + 3) dx$	$S = \int_{-3}^3 (3 - x) dx$	$S = \int_{-3}^3 3 - x dx$	$S = \int_{-3}^3 x + 3 dx$

Установити відповідність між лініями, заданими рівняннями (1–4), та об'ємами тіл (А–Д), утворених у результаті обертання цих ліній навколо осі x .

1 $y = \sqrt{x}$, де $x \in [-2; 2]$

А $0,5\pi$

2 $y = \sqrt{\sin x}$, де $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

Б π

3 $y = \frac{1}{\cos x}$, де $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

В $1,5\pi$

4 $y = \frac{1}{\sin x}$, де $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

Г $\sqrt{3}\pi$

Д 4π

Обчислити інтеграл $12 \int_2^3 \frac{1-x^4}{1-x} dx$.

Обчислити інтеграл $3 \int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 8x - 6x^2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $y = 0$.

Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 8 - 0,5x^2$, дотичною до нього в точці $x = -2$ і прямою $x = 1$.

Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 12t^2 + 4$. Знайти закон руху $S(t)$ точки, якщо в момент часу $t = 1$ с її швидкість дорівнювала 10 м/с, а $S(1) = 12$ м. У відповідь записати $S(3)$.

ПОРАДНИК

№ п/п	Величини	Співвідношення	Знаходження похідної	Знаходження інтеграла
1	S – переміщення v – швидкість	$\Delta S = v(t) \cdot \Delta t$	$v(t) = S'(t)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
2	A – робота F – сила	$\Delta A = F(x) \cdot \Delta x$	$F(x) = A'(x)$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$
3	A – робота N – потужність	$\Delta A = N(t) \cdot \Delta t$	$N(t) = A'(t)$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$
4	M – маса тонкого стержня – лінійна густина	$\Delta m = \rho(x) \cdot \Delta x$	$\rho(x) = m'(x)$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$
5	q – електричний заряд I – сила струму	$\Delta q = I(t) \cdot \Delta t$	$I(t) = q'(t)$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
6	Q – кількість теплоти c – теплоємність	$\Delta Q = c(t) \cdot \Delta t$	$c(t) = Q'(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$

1	V – обсяг продукції $\Pi(t)$ – продуктивність виробництва, $t \in [t_1; t_2]$	$V = \int_{t_1}^{t_2} \Pi(t) dt$
2	ΔK – приріст капіталу $I(t)$ – чисті інвестиції $t \in [T_1; T_2]$	$\Delta K = \int_{T_1}^{T_2} I(t) dt$

ЗАУВАЖЕННЯ:

Якщо первісна F для функції f є елементарною функцією, то кажуть, що інтеграл $\int f(x)dx$ виражається в елементарних функціях. Але не будь-який інтеграл від елементарних функцій виражається в елементарних функціях.

- 1) $\int e^{-x^2} dx$ (Пуассонів інтеграл);
- 2) $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$ (Френелеві інтеграли);
- 3) $\int \frac{dx}{\ln x}, 0 < x < 1$ (інтегральний логарифм);
- 4) $\int \frac{\sin x}{x} dx, x \neq 0$ (інтегральний синус);
- 5) $\int \frac{\cos x}{x} dx, x \neq 0$ (інтегральний косинус).