ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА

З ТЕМИ:

«Комбінаторні задачі. Задачі на теорію ймовірностей. Елементи статистики, середні величини»

Укладач: Рева Олена Сергіївна

кз "Маріупольська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №47 Маріупольської міської ради Донецької області"

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Комбінаторика

Комбінаторика — розділ математики, у якому вивчають способи вибору та розміщення елементів деякої скінченної множини на основі певних умов.

Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають *сполуками*.

Якщо всі елементи різні, то одержуємо сполуку без повторень, а якщо елементи можуть повторюватися, то сполуку з повтореннями. Далі будемо розглядати сполуки без повторень.

Схема плану розв'язування комбінаторних задач

Правило суми	Правило добутку
Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами (при цьому вибір елемента A виключає одночасний вибір і елемента B), то A або B можна вибрати $(m+n)$ способами.	Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A і B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.
АБО	**ТА**

Факторіал – це добуток послідовних натуральних чисел від 1 до n і позначається $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Перестановки

Означення. ***Перестановкою з n елементів*** **називається будь-яка впорядкована множина з n заданих елементів (тобто така** *множина, для якої вказано, який елемент розташований на першому місці, який — на другому, ..., який — на n-му*).

Формула числа перестановок (P_n)	Приклад
$P_n = n!$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читають: «ен факторіал»)	Кількість різних шестицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторюючи ці цифри в одному числі, дорівнює: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Розміщення

Означення. ***Розміщенням з n елементів по k*** **називається будь-яка впорядкована множина з k елементів, складена з елементів заданої n-елементної множини.**

Формула числа розміщень (A_n^k)	Приклад
$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	Кількість різних трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не повторюються, дорівнює: $A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120.$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Комбінації

Означення. ***Комбінацією без повторень з n елементів по k*** **називається будь-яка k-елементна підмножина заданої n-елементної множини.**

Формула числа комбінацій $\left(C_n^k\right)$	Приклад
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (за означенням вважають, що $C_n^0 = 1$)	Із класу, що складається з 25 учнів, можна вибрати 5 учнів для чергування по школі C_{25}^5 способами, тобто: $C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25!}{5!\cdot 20!} = \frac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 53130$ способами.

Деякі властивості числа комбінацій без повторень

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (зокрема $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)

$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Вибір формули

Чи враховується порядок наступності елементів у сполуці?

- Так → Чи всі елементи входять до сполуки?
  - Так → **Перестановки** $P_n = n!$
  - Ні → **Розміщення** $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Ні → **Комбінації** $C_n^k = \frac{n!}{k(n-k)!}$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

1. Випадкові події

Поняття	Приклади
Під *експериментами з випадковими результатами* (або, коротше, *випадковими експериментами*) розуміють різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах.	Експерименти з рулеткою, підкиданням грального кубика, підкиданням монети, серія пострілів одного стрільця по одній і тій самій мішені, участь у лотереї тощо.
Будь-який результат випадкового експерименту називають *випадковою подією*. Унаслідок такого експерименту ця подія може або відбутися, або не відбутися. Випадкові події зазвичай позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, D, ...	Випадання «герба», випадання «числа» при підкиданні монети; виграш у лотерею; випадання певної кількості очок при підкиданні грального кубика тощо.

2. Поняття, пов'язані з випадковими подіями в деякому експерименті

Події B_1, B_2, ..., B_n називають *рівноможливими*, якщо в даному експерименті немає ніяких підстав вважати, що одна з них може відбутися переважніше за будь-яку іншу.	В експерименті з одноразового підкидання однорідної монети правильної форми рівноможливими є події: A — випав «герб», B — випало «число».
Події A і B називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в даному експерименті.	В експерименті з підкидання монети події A — випав «герб» і B — випало «число» — несумісні.
Події C_1, C_2, ..., C_n називають *несумісними*, якщо кожна пара з них несумісна в даному експерименті.	Для експерименту з підкидання грального кубика події C_1 — випадання 1 очка, C_2 — випадання 3 очок, C_3 — випадання 5 очок, C_4 — випадання парного числа очок — несумісні.
Подію U називають *вірогідною*, якщо в результаті даного експерименту вона обов'язково відбудеться.	Випадання менше 7 очок при підкиданні звичайного грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок).
Подію $\varnothing$ називають *неможливою*, якщо вона не може відбутися в даному експерименті.	Випадання 7 очок при підкиданні грального кубика.

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

3. Простір елементарних подій

Поняття	Приклад
Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій u_1, u_2, ..., u_n. Назвемо ці події *елементарними подіями*, а множину всіх цих подій $$U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$$ — *простором елементарних подій*.	1. Для експерименту з підкидання монети елементарними будуть події: u_1 — випав «герб», u_2 — випало «число». Тоді простір елементарних подій буде складатися з двох подій: $U=\{u_1,u_2\}$. (Ці події попарно несумісні, у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій.)
Будь-яку підмножину простору елементарних подій U вважатимемо випадковою подією A.	2. Для експерименту з підкидання грального кубика елементарними можуть бути події u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, де u_k — випадання k очок, $k=1$, 2, 3, 4, 5, 6. У цьому випадку простір елементарних подій буде складатися з шести подій: $$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}.$$

4. Класичне означення ймовірності (для рівноможливих елементарних подій)

Нехай задано простір елементарних подій, усі елементарні події якого — рівноможливі. *Ймовірність події A* — це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій (m) до числа всіх рівноможливих елементарних подій (n) у даному експерименті: $$P(A)=\frac{m}{n}.$$	**Приклад.** Знайдіть імовірність випадання більше чотирьох очок при підкиданні грального кубика. ▶ Розглянемо як елементарні події шість рівноможливих результатів підкидання кубика — випало 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок (отже, $n=6$). Подія A — випало більше 4 очок. Сприятливими для події A є тільки дві елементарні події — випало 5 або 6 очок (тобто $m=2$). Тоді $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. ◁

Ймовірність вірогідної (U) та неможливої ($\varnothing$) подій:

$$P(U)=1 \qquad P(\varnothing)=0$$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Статистика — це наука про отримання, обробку й аналіз кількісних даних, які характеризують масові явища

Етапи статистичного дослідження

Збирання даних — Обробка даних — Аналіз даних — Висновки

ЗБИРАННЯ ДАНИХ

Дані, на основі яких проводять дослідження, називають **вибіркою**

Вибірка повинна бути **репрезентативною**

Збирання даних має ґрунтуватися на ***масовості та репрезентативності вибірки***

АНАЛІЗ ДАНИХ

Середнє арифметичне

Медіана

Мода

Середнє арифметичне, моду і медіану називають **мірами центральної тенденції**

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Скільки п’ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

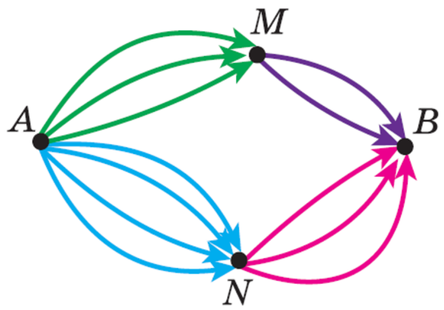
1 2 3 4 5

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1}$$

Першу цифру ми обираємо з 5-ти,
Другу – з 4-х,
Третю – з 3-х,
Четверту – з 2-х,
П’яту – з 1-ї

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

На рисунку показано схему доріг, які ведуть з міста A до міста B. Скількома способами можна проїхати з міста A до міста B?



з міста А в місто В можна проїхати:
3-**ма**, ***ТА*** потім 2-**ма** марштутами
АБО
4-**ма**, ***ТА*** потім 3-**ма** марштутам

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 6 + 12 = 18$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Скількома способами можна розставити на полиці 7 різних книг?

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

У футбольній команді, яка складається з 11 гравців, потрібно обрати капітана та його заступника. Скількома способами можна це зробити?

$$A_{11}^2 = \frac{11!}{(11-2)!} = \frac{11!}{9!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} =$$
$$= 10 \cdot 11 = 110$$

У класі з поглибленим вивченням математики 29 учнів та учениць. Скількома способами можна сформувати команду з 5 осіб для участі в математичній олімпіаді?

$$C_{29}^5 = \frac{29!}{5 \cdot (29-5)!} = \frac{29!}{5 \cdot 24!} = \frac{25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29}{5}$$
$$=5 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 = 2850120$$

Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило рівно 2 муляри?

$$C_7^2 \cdot C_{13}^3 = \frac{7!}{2 \cdot (7-2)!} \cdot \frac{13!}{3 \cdot (13-3)!} = \frac{7! \cdot 13!}{2 \cdot 5! \cdot 3 \cdot 10!} =$$
$$= 7 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 12012$$

На прямій позначено 12 точок, а на паралельній їй прямій — 7 точок. Скільки існує трикутників із вершинами в цих точках?

$$7 \cdot C_{12}^2 + 12 \cdot C_7^2 = \frac{7 \cdot 12!}{2 \cdot 10!} + \frac{12 \cdot 7!}{2 \cdot 5!} =$$
$$\frac{7 \cdot 11 \cdot 12}{2} + \frac{12 \cdot 6 \cdot 7}{2} =$$
$$= 7 \cdot 11 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 7 = 462 + 252 = 714$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Яка ймовірність вгадати правильну відповідь на тестове завдання НМТ?

А	Б	В	Г	Д

Всього варіантів відповідей – 5;
Правильна відповідь – 1;
А – вгадати правильну відповідь

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

На полиці лежать 12 зошитів, з яких 5 у клітинку. Яка ймовірність того, що вибрані навмання 2 зошити будуть у клітинку?

Подія А – навмання перший раз обрати зошит в клітинку

$n = 12 \qquad m = 5$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{12}$$

Подія В – навмання другий раз обрати зошит в клітинку

$n = 11 \qquad m = 4$

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11}$$

Подія С – навмання обрати два зошити в клітинку

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} = \frac{5}{33}$$

Події А та В – залежні події. $P(C)$ – умовна ймовірність

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

У ящику лежать 12 жовтих і 15 синіх куль. Яка ймовірність того, що з вибраних навмання восьми куль п'ять будуть жовтого кольору?

Сині кулі – 15
Жовті кульки – *12*

Всього – 27

Подія A – обрати 5 жовтих куль з 8

$$n = C_{27}^{8} = \frac{27!}{19!\cdot 8!} = 2220075$$

$$m = C_{12}^{5} = \frac{12!}{7!\cdot 5!} = 792$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{792}{2220075} = \frac{22}{61669} = 0{,}00036$$

За даними частотної таблиці річних оцінок, знайти міри центральної тенденції

	Всього	7б	8б	9б	10б	11б	12б
Частота	19	2	6	3	3	4	1
Відносна частота	100%	10%	32%	16%	16%	21%	5%

$$\text{Сер. бал} = \frac{7\cdot2+8\cdot6+9\cdot3+10\cdot3+11\cdot4+12\cdot1}{19} = \frac{175}{19} = 9{,}21$$

Мода – 8

$\cancel{7}$ $\cancel{7}$ $\cancel{8}$ $\cancel{8}$ $\cancel{8}$ $\cancel{8}$ $\cancel{8}$ $\cancel{8}$ $\cancel{9}$ 9 $\cancel{9}$ $\cancel{10}$ $\cancel{10}$ $\cancel{10}$ $\cancel{11}$
$\cancel{11}$ $\cancel{11}$ $\cancel{11}$ $\cancel{12}$

Медіана – 9

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

НМТ 2024

Сергій купив 4 чорні, 6 червоних і n синіх ручок по 27 грн, 15 грн і 10 грн кожна. Середня ціна однієї ручки виявилася меншою за 13 грн. Укажіть найменше можливе значення n.

Впишіть відповідь:

23

4 чорних ручки по 27 грн, 6 червоних ручки по 15 грн, n синіх ручок по 10 грн. Середня ціна однієї ручки

$$\frac{4\cdot 27+6\cdot 15+n\cdot 10}{4+6+n}<13,$$

$$\frac{108+90+10n}{10+n}<13,$$

n – число додатне, тому можна помножити нерівність на $(10+n)$.

$$198+10n<13(10+n),$$

$$198+10n<130+13n,$$

$$3n>68,\quad n>\frac{68}{3},\quad n>22\frac{2}{3}.$$

Найменше можливе $n=23$.

НМТ 2023

Переможцю олімпіади заплановано подарувати комплект із 5 книг, у якому 2 збірники олімпіадних задач та 3 науково-популярні книги. Скільки всього варіантів формування такого комплекту книг, якщо є 8 різних збірників та 10 різних науково-популярних книг?

Впишіть відповідь:

3360

Розв'яжемо задачу з комбінаторики: вибираємо з 8 збірників 2, а з 10 науково-популярних книг 3.

Книги різні, тому застосуємо формулу сполук, щоб знайти кількість варіантів вибору книг кожного виду та правило добутку:

$$C_8^2\cdot C_{10}^3=\frac{8!}{2!6!}\cdot\frac{10!}{3!7!}=\frac{7\cdot 8\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=$$

$$=4\cdot 4\cdot 3\cdot 10\cdot 7=48\cdot 70=3360.$$

ВІДЕО БЛОК

Скористайтесь порадами з відео розбору завдань!

Комбінаторика

1 2 3 4
5 6 7

Теорія ймовірностей

1 2

Елементи статистики

1 2 3
4 5 6

ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

Запрошуємо вас скористатися онлайн-тренажерами для ефективної підготовки до НМТ з математики — тренуйтесь, перевіряйте знання та впевнено йдіть до мети!

Комбінаторика

1 2 3 4

5 6 7 8

9 10

Теорія ймовірностей

1 2 3 4

Елементи статистики

1 2 3 4

5 6 7

САМОСТІЙНИЙ БЛОК