



ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА
З ТЕМИ:
«Геометричні перетворення»

Укладач: Кубрак Ганна Вячеславівна
Великоновосілівський ЗЗСО І-ІІІ ст. №2
Великоновосілівської селищної ради
Волноваського району Донецької області

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК



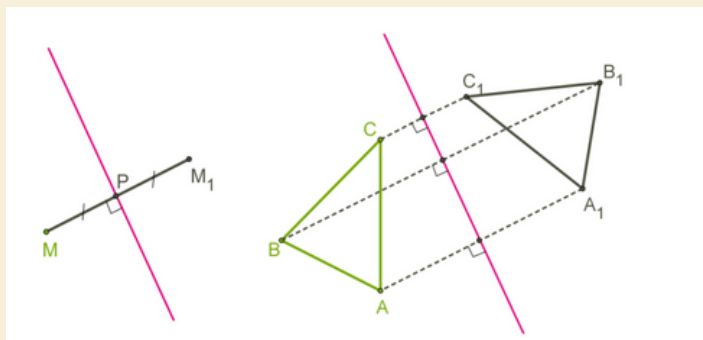
Рух — це відображення площини на себе, при якому зберігаються відстані між точками.

Якщо дві фігури поєднати одну з одною за допомогою руху, то ці фігури будуть однакові, рівні.

Один із таких рухів — **осьова симетрія**. Кожній точці на площині за певним законом ставиться у відповідність інша точка тієї самої площини.

Закон такий:

1. Із точки M проводиться перпендикуляр до осі симетрії (прямої) і виходить точка P — точка перетину перпендикуляра з віссю.
2. На перпендикулярі відкладається відрізок $PM_1 = PM$ і розташовується точка M_1 .



Отже, будь-якій точці M площини ставиться у відповідність єдина точка M_1 площини.

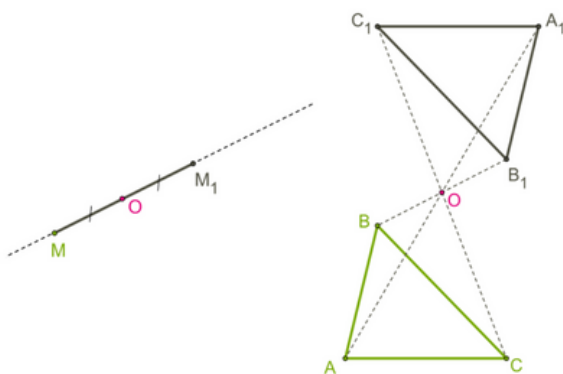
Осьова симетрія є окремим випадком так званого відображення площини на себе.

Щоб відобразити фігури в симетрії відносно прямої, достатньо відобразити відповідні вершини.

Іншим окремим випадком відображення площини на себе є **центральна симетрія**.

Точка площини M переходить у точку площини M_1 за наступним законом:

1. Із точки M проводиться пряма, що з'єднує точку з **центром симетрії** (точкою O).
2. На прямій відкладається відрізок $OM_1 = OM$ і розташовується точка M_1 .



M_1 ставиться у відповідність точці M .

Щоб відобразити фігури в симетрії відносно точки, достатньо відобразити відповідні вершини.

Обидва наведених приклади відображень мають наступні властивості:

1. Кожен відрізок даної довжини переходить у відрізок тієї самої довжини, тобто від якими точками зберігаються.
2. Промінь переходить у промінь, пряма — у пряму.
3. Під час руху фігура відображається в рівну їй фігуру.
4. Рух є оберненим. Відображення, зворотне руху, є рухом.
5. Композиція двох рухів також є рухом.

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Паралельне перенесення



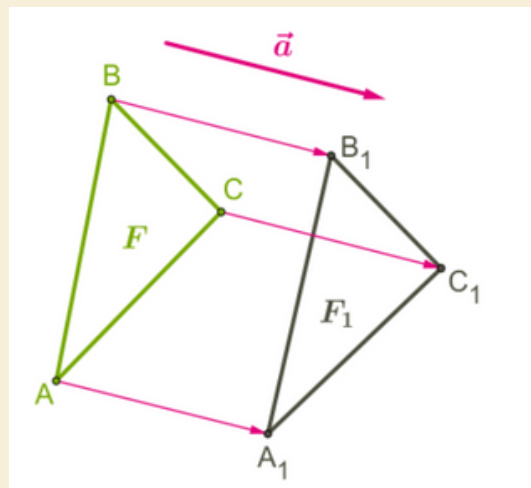
Паралельним перенесенням фігури називається перенесення всіх точок простору на одну відстань в одному напрямі.

Паралельне перенесення визначає вектор, за яким відбувається перенесення.

Щоб здійснити паралельне перенесення, потрібно знати напрям і відстань, що означає задати вектор.

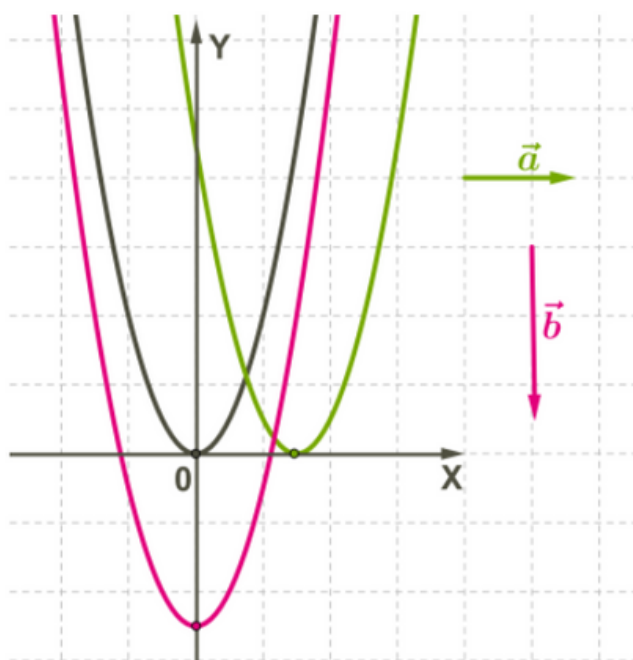
Аби при паралельному перенесенні побудувати зображення многокутника, достатньо побудувати зображення вершин цього многокутника.

Початкова фігура та фігура, отримана після паралельного перенесення, рівні.



Паралельне перенесення використовується для конструювання графіків функцій.

На малюнку зображена парабола і два результати паралельного перенесення.



ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

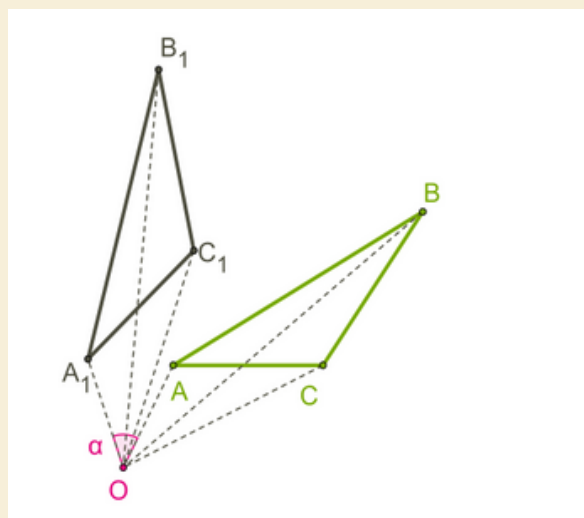
Поворот

Якщо одна фігура отримана з іншої фігури поворотом усіх її точок щодо центру O на один і той самий кут в одному й тому самому напрямі, то таке перетворення фігури називається **поворотом**.

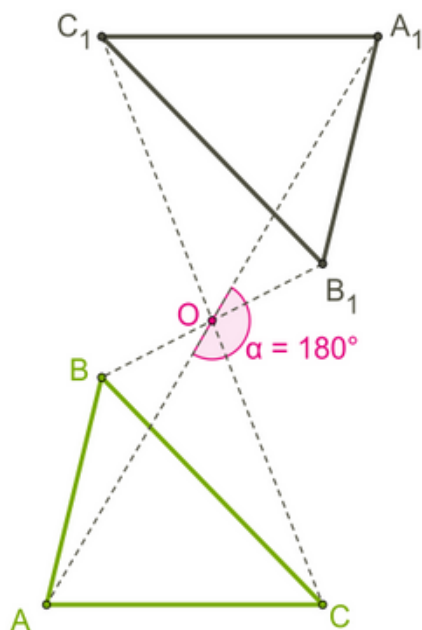
Аби поворот мав місце, повинен бути заданий центр O і кут повороту α .

Проти годинникової стрілки буде додатний кут повороту, а за годинниковою стрілкою — від'ємний (так само, як кути повороту в одиничному колі).

Трикутник ABC повернений у додатному напрямі (приблизно на $\alpha = 45^\circ$).



Якщо кут повороту дорівнює 180° або -180° , то фігура відображається як центрально симетрична даній, і цей поворот називається **центральною симетрією**.



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Геометричні перетворення

Приклад

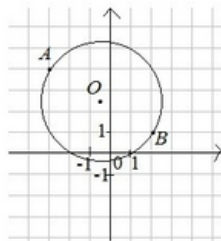
Задано коло з діаметром AB , де $A(-3; 4)$, $B(2; 1)$. Побудуйте коло, симетричне заданому відносно осі ординат.

♦ Знайдемо координати центра кола як середину відрізка AB .

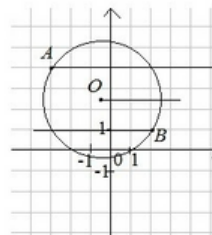
$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5,$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

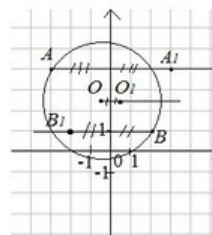
Отже, точка $O(-0,5; 2,5)$. Побудуємо задане коло в системі координат.



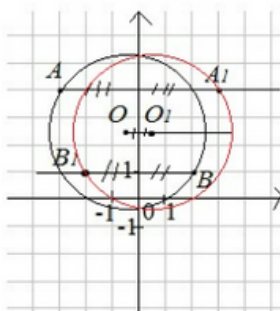
Через точки A , B і O проведемо прямі перпендикулярні до осі Oy .



Відкладемо на них відрізки, що дорівнюють відповідно відстані від точок A , B та O до осі ординат. Отримаємо точки A_1 , B_1 та O_1 .



Через точки A_1 та B_1 проведемо коло з центром O_1 та радіусом $O_1A_1 = O_1B_1$.



Симетрія кола відносно осі ординат

Це і буде коло, симетричне даному відносно осі ординат. ♦

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад

У яку фігуру може перейти при гомотетії:

а) рівносторонній трикутник;

б) квадрат ?

♦ а) Оскільки гомотетія зберігає градусну міру кутів, то рівносторонній трикутник може перейти лише у рівносторонній трикутник (оскільки в будь-якому рівносторонньому трикутнику всі кути дорівнюють по 60°);

б) Оскільки гомотетія є перетворенням подібності, то вона зберігає всі його властивості. А саме відстані між будь-якими точками фігури є пропорційними, а також зберігає кути між променями. Тому при гомотетії квадрат може перейти лише у квадрат (всі сторони зміняться в k разів, а кути залишаться по 90°). ♦

Приклад

У яку точку переходить точка:

а) $A(2; -8)$ при паралельному перенесенні, що переводить точку $B(2;0)$ у точку $D(-3;6)$;

б) $C(-3;4)$ при паралельному перенесенні, що переводить точку $A(0;5)$ у точку $B(3;-1)$?

♦ Запишемо формулу паралельного перенесення в загальному випадку:

$$x_1 = x + a, y_1 = y + b.$$

а) Підставимо координати точок B і D у записані формули та знайдемо значення a та b : $x_D = x_B + a \Rightarrow -3 = 2 + a \Rightarrow a = -5$,

$$y_D = y_B + b \Rightarrow 6 = 0 + b \Rightarrow b = 6.$$

Підставимо знайдені значення у формули паралельного перенесення для визначення координат точки, в яку переходить задана точка $A(2; -8)$:

$$x = x_A + a \Rightarrow x = 2 + (-5) = -3,$$

$$y = y_A + b \Rightarrow y = -8 + 6 = -2.$$

Отже, точка $A(2; -8)$ при заданому паралельному перенесенні переходить в точку $(-3; -2)$.

б) Аналогічно до попереднього випадку:

$$x_B = x_A + a \Rightarrow 3 = 0 + a \Rightarrow a = 3,$$

$$y_B = y_A + b \Rightarrow -1 = 5 + b \Rightarrow b = -6.$$

Тоді:

$$x = x_C + a \Rightarrow x = -3 + 3 = 0,$$

$$y = y_C + b \Rightarrow y = 4 - 6 = -2.$$

Отже, задана точка $C(-3; 4)$ при заданому паралельному перенесенні переходить в точку $(0; -2)$. ♦

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Приклад

Знайти координати точки, в яку переходить точка $M(-3; 1)$ при:

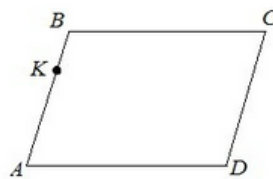
- а) симетрії відносно прямої Ox ;
- б) симетрії відносно прямої Oy ;
- в) симетрії відносно початку координат;
- г) симетрії відносно прямої $y = -x$.

- ♦ а) Симетрія відносно осі Ox задається формулами: $x_1 = x$, $y_1 = -y \Rightarrow x_1 = -3$, $y_1 = -1$. Отже, $A_1(-3; -1)$;
- б) Симетрія відносно осі Oy задається формулами: $x_1 = -x$, $y_1 = y \Rightarrow x_1 = 3$, $y_1 = 1$. Отже, $A_1(3; 1)$;
- в) Симетрія відносно початку координат задається формулами: $x_1 = -x$, $y_1 = -y \Rightarrow x_1 = 3$, $y_1 = -1$. Отже, $A_1(3; -1)$;
- г) Симетрія відносно прямої $y = -x$ задається формулами: $x_1 = -y$, $y_1 = -x \Rightarrow x_1 = -1$, $y_1 = 3$. Отже, $A_1(-1; 3)$.♦

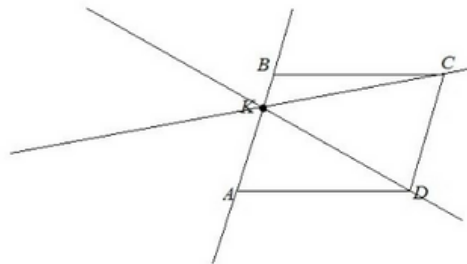
Приклад

Побудуйте паралелограм $ABCD$. На стороні AB оберіть точку K . Побудуйте паралелограм, симетричний даному відносно точки K .

- ♦ Побудуємо паралелограм $ABCD$ та оберемо точку K на стороні AB .

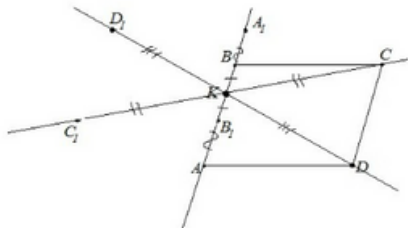


Через кожну вершину та точку K проведемо прямі відповідно AK , BK , CK та DK .

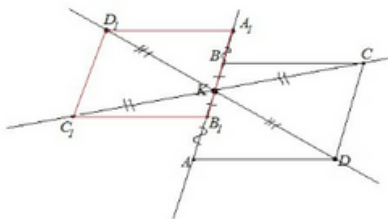


ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

На кожній з прямих відкладемо відстані A_iK , B_iK , C_iK та D_iK , що відповідно дорівнюють відрізкам AK , BK , CK та DK .



Сполучимо точки A_i , B_i , C_i та D_i .

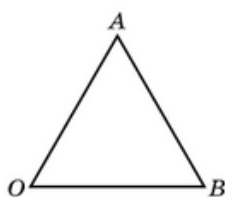


$A_iB_iC_iD_i$ – паралелограм симетричний даному відносно точки K . ♦

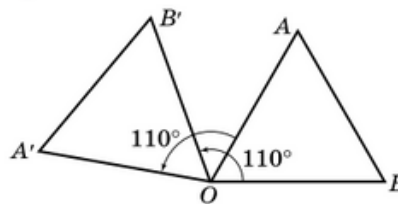
Задача. Трикутник AOB – рівносторонній (мал. 194).

1) Побудувати відрізок $A'B'$, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут 110° проти годинникової стрілки.

2) Знайти градусну міру кута AOB' .



Мал. 194



Мал. 195

Розв'язання. 1) Побудову зображено на малюнку 195.

2) $\angle AOB' = \angle B'OB - \angle AOB = 110^\circ - 60^\circ = 50^\circ$.

Відповідь. 2) 50° .

Задача. Точки $B(-5; 7; z)$ і $B'(x; y; 0)$ симетричні відносно точки $O(1; -2; 3)$. Знайти x , y і z .

Розв'язання. Точка O – середина відрізка BB' . Тому за формулами середини відрізка маємо:

$$1 = \frac{-5 + x}{2}, \quad -2 = \frac{7 + y}{2} \quad \text{і} \quad 3 = \frac{z + 0}{2}.$$

Отже, $x = 7$, $y = -11$, $z = 6$.

Відповідь. $x = 7$, $y = -11$, $z = 6$.

ВІДЕО БЛОК



**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

1. Точка $A(2; 3)$ симетрична відносно початку координат точці:

- ☐ $(-2; 3)$
- ☐ $(2; -3)$
- ☐ $(-2; -3)$
- ☐ $(-2; 0)$

2. При русі вертикальні кути відображаються...

- ☐ у прямі кути;
- ☐ у тупі кути
- ☐ у вертикальні кути;
- ☐ правильні всі варіанти.

3. Формули паралельного перенесення: Точка $M(-6; 2) \rightarrow A_1(-3; -2)$. Знайдіть величини a і b у формулах паралельного перенесення.

- ☐ $a=3, b=-4$
- ☐ $a=-4, b=-3$
- ☐ $a=-3, b=-4$
- ☐ $a=-3, b=4$

4. Скільки осей симетрії має коло?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ безліч
- ☐ жодного

5. Рух переводить кут 90° в інший кут. Чому дорівнює величина отриманого кута?

- ☐ 30
- ☐ 60
- ☐ 90
- ☐ 180

6. Периметри подібних багатокутників відносяться як 4:1. Як відносяться площі цих багатокутників?

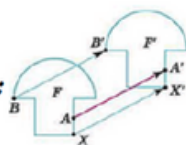
- ☐ $1/4$
- ☐ $2/16$
- ☐ $16/1$
- ☐ $1/4$ і $-1/4$

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

7. Трикутник ABC задано його вершинами: $A(6; -2)$, $B(4; 3)$, $C(-1; 6)$. Запишіть координати вершин іншого трикутника, симетричного даному відносно осі Oy .

- ☐ $A_1(-6; -2)$, $B_1(-4; 3)$, $C_1(1; 6)$
- ☐ $A_1(6; 2)$, $B_1(4; -3)$, $C_1(-1; -6)$
- ☐ $A_1(6; -2)$, $B_1(4; 3)$, $C_1(-1; 6)$
- ☐ $A_1(-2; 6)$, $B_1(3; 4)$, $C_1(6; -1)$

8. На рисунку зображено:



- ☐ паралельне перенесення
- ☐ осьова симетрія
- ☐ центральна симетрія
- ☐ поворот