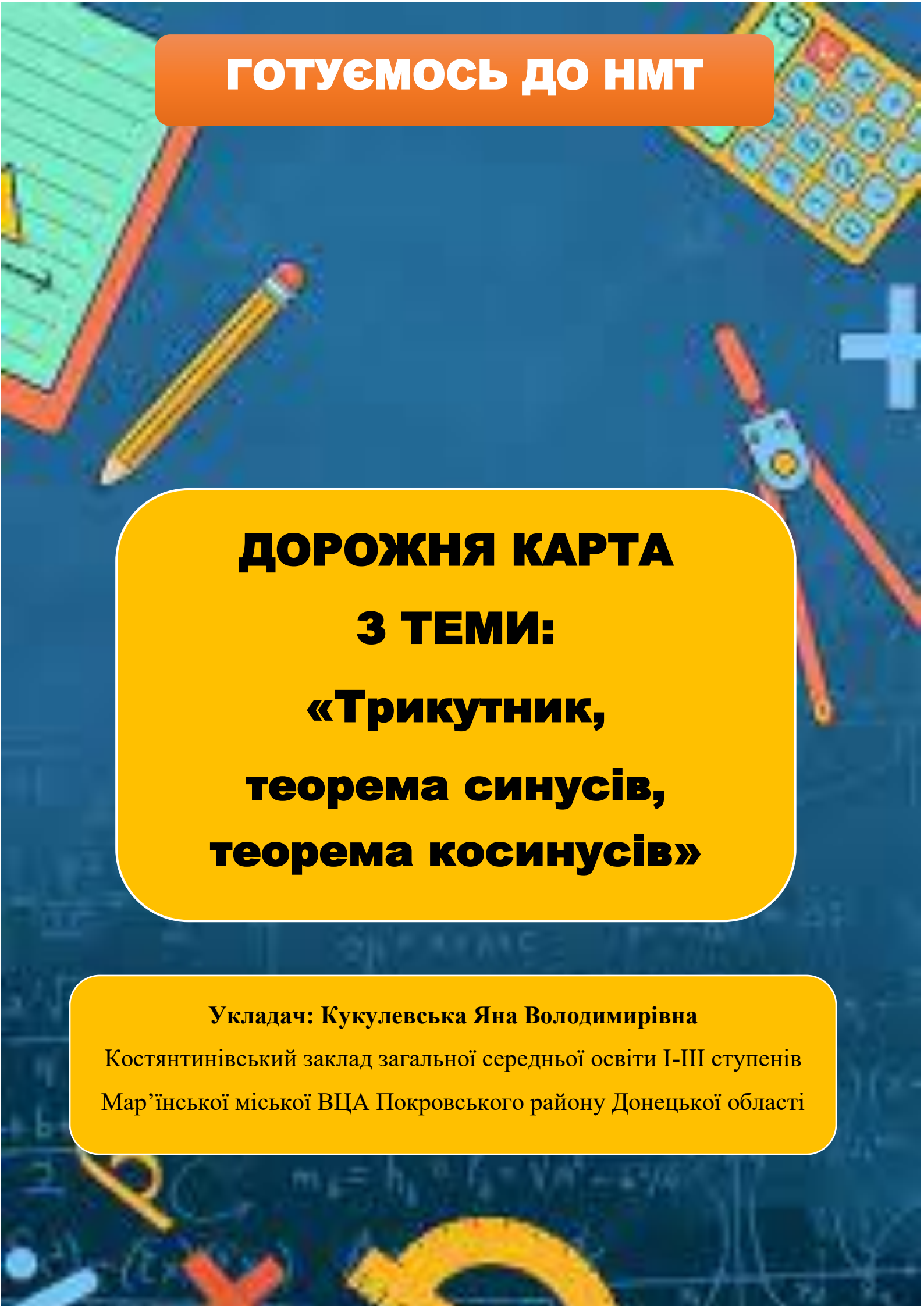




ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА
З ТЕМИ:
«Трикутник,
теорема синусів,
теорема косинусів»

Укладач: Кукулевська Яна Володимирівна

Костянтинівський заклад загальної середньої освіти І-ІІІ ступенів
Мар'їнської міської ВЦА Покровського району Донецької області

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

ТРИКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

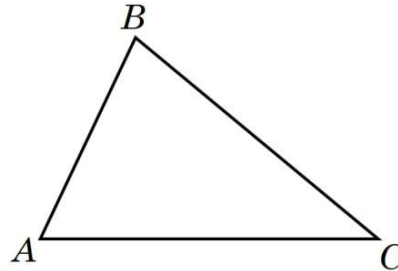
ОЗНАЧЕННЯ

Трикутник – це фігура, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків з кінцями у цих точках

КУТ ТРИКУТНИКА

Кути трикутника – це три кути, кожний з яких утворений двома променями, що виходять з вершини трикутника і проходять через дві інші вершини

ВИГЛЯД



A, B, C – вершини
 AB, BC, AC – сторони
 $\angle A, \angle B, \angle C$ – кути
 $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$
 – периметр

ПОЗНАЧЕННЯ

$\triangle ABC$

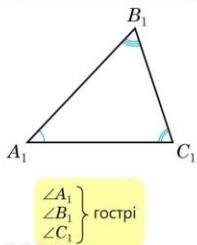
$\triangle$ – символ трикутника

ПЕРИМЕТР ТРИКУТНИКА

Периметр трикутника – це сума довжин усіх сторін трикутника

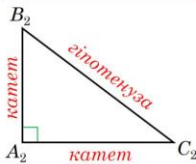
НАЗВИ ТРИКУТНИКІВ ЗА КУТАМИ

ГОСТРОКУТНИЙ



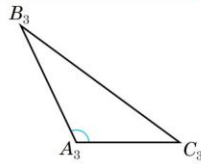
$\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ } гострі

ПРЯМОКУТНИЙ



$\angle A_2$ – прямий

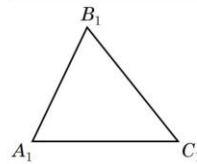
ТУПОКУТНИЙ



$\angle A_3$ – тупий

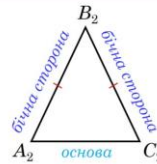
НАЗВИ ТРИКУТНИКІВ ЗА СТОРОНАМИ

РІЗНОСТОРОННІЙ



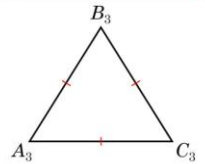
$A_1B_1 \neq B_1C_1 \neq A_1C_1$

РІВНОБЕДРЕНИЙ



$A_2B_2 = B_2C_2 \neq A_2C_2$

РІВНОСТОРОННІЙ

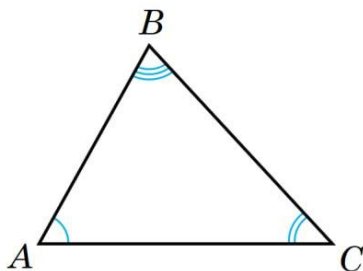


$A_3B_3 = B_3C_3 = A_3C_3$

ТЕОРЕМА ПРО СУМУ КУТІВ ТРИКУТНИКА

ТЕОРЕМА

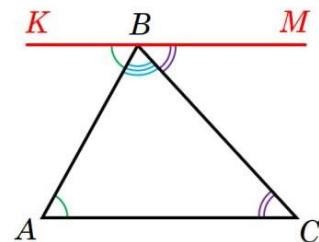
Сума кутів трикутника дорівнює 180° .



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

ДОВЕДЕННЯ

1. Проведемо $KM \parallel AC$.
2. $\angle BAC = \angle ABK$ як внутрішні різносторонні кути при січній AB .
3. $\angle ACB = \angle CBM$ як внутрішні різносторонні кути при січній BC .
4. $\angle ABK + \angle ABC + \angle CBM = 180^\circ$.
5. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.



НАСЛІДОК

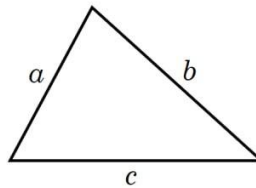
Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

ТЕОРЕМА

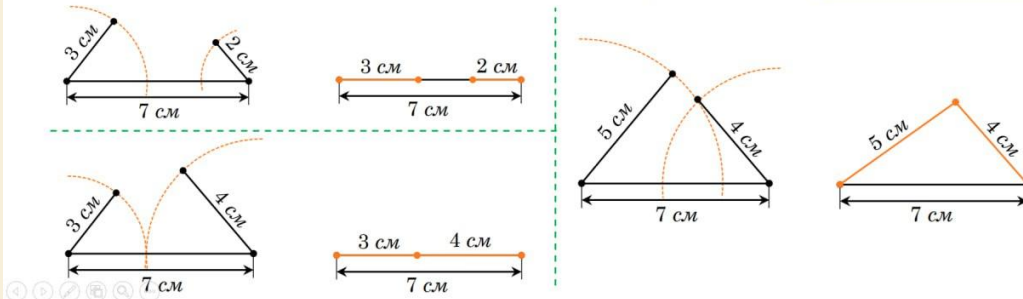
Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін і більша за їх різницю.



$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$



ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА

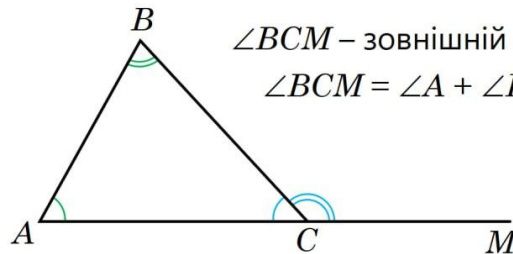
ОЗНАЧЕННЯ

Зовнішній кут трикутника – це кут, суміжний із кутом цього трикутника

ТЕОРЕМА

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

ВИГЛЯД



$\angle BCM$ – зовнішній кут

$$\angle BCM = \angle A + \angle B$$

ДОВЕДЕННЯ

$$1. \angle ACB = 180^\circ - (\angle A + \angle B).$$

$$2. \angle BCM = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - (180^\circ - (\angle A + \angle B)) = 180^\circ - 180^\circ + \angle A + \angle B = \angle A + \angle B.$$

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

ОЗНАЧЕННЯ

Середня лінія трикутника – це відрізок, що з'єднує середини двох сторін трикутника.

ТЕОРЕМА

Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін і дорівнює її половині:

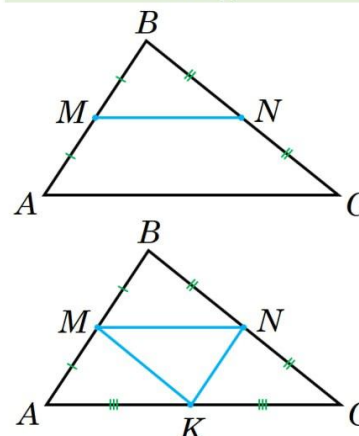
$$MN \parallel AC$$

$$MN = \frac{AC}{2}$$

ВЛАСТИВІСТЬ

Три середні лінії утворюють трикутник, кожні сторони якого вдвічі менші за сторони зовнішнього трикутника.

ВИГЛЯД



ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

РІВНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

ОЗНАЧЕННЯ

Рівні трикутники – це трикутники, які можна сумістити накладанням.

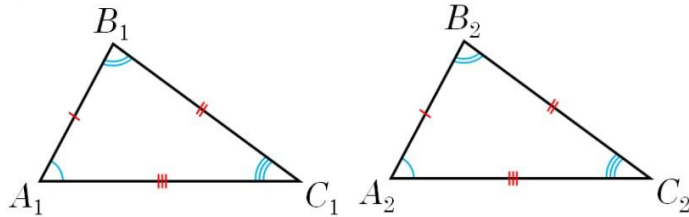
ПОЗНАЧЕННЯ

$$\Delta A_1 B_1 C_1 = \Delta A_2 B_2 C_2$$

ВЛАСТИВІСТЬ

Рівні трикутники мають однакові відповідні сторони і кути.

ВИГЛЯД



$$A_1 B_1 = A_2 B_2$$

$$B_1 C_1 = B_2 C_2$$

$$A_1 C_1 = A_2 C_2$$

$$P_{\Delta A_1 B_1 C_1} = P_{\Delta A_2 B_2 C_2}$$

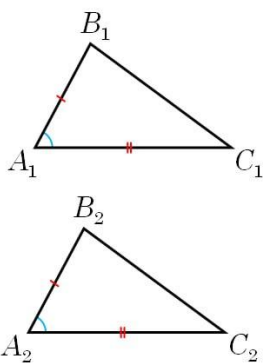
$$\angle A_1 = \angle A_2$$

$$\angle B_1 = \angle B_2$$

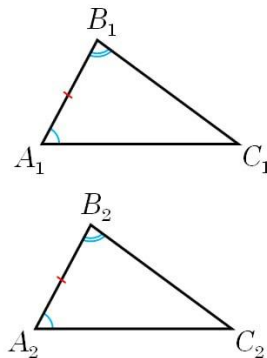
$$\angle C_1 = \angle C_2$$

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

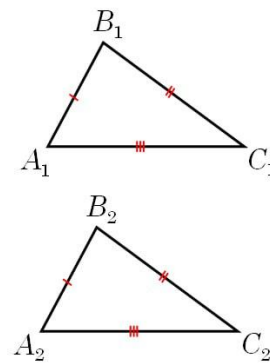
- 1** За двома сторонами і кутом між ними



- 2** За стороною і двома прилеглими до неї кутами



- 3** За трьома сторонами



БІСЕКТРИСА ТРИКУТНИКА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

ОЗНАЧЕННЯ

Бісектриса трикутника – це відрізок бісектриси внутрішнього кута трикутника, що з'єднує дану вершину з точкою на протилежній стороні.

ТЕОРЕМА

Кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута:

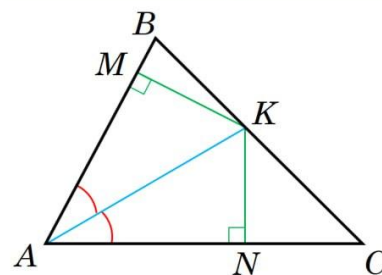
$$MK = KN$$

ВЛАСТИВІСТЬ

Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну куту сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC}$$

ВИГЛЯД



AK – бісектриса $\angle A$

$$\angle BAK = \angle CAK$$

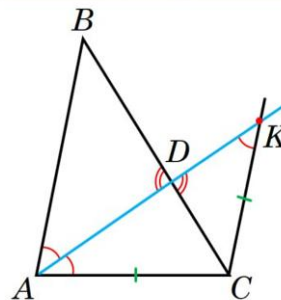
ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

БІСЕКТРИСА ТРИКУТНИКА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

ВЛАСТИВІСТЬ

Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну куту сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам.

ВИГЛЯД



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

ДОВЕДЕННЯ

1. Проведемо $CK \parallel AB$ і продовжимо бісектрису AD до їх перетину.
2. $\angle CKA = \angle BAD$ як внутрішні різносторонні при $AB \parallel CK$ та січній AK .
3. $\triangle AKC$ – рівнобедрений. Тоді $AC = CK$.
4. $\angle ADB = \angle CDK$ як вертикальні.
5. $\triangle ABD \sim \triangle KCD$ (за двома кутами).
6. Маємо: $\frac{AB}{KC} = \frac{BD}{CD}$ 7. Оскільки $AC = KC$, то $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

ВИСОТА ТРИКУТНИКА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

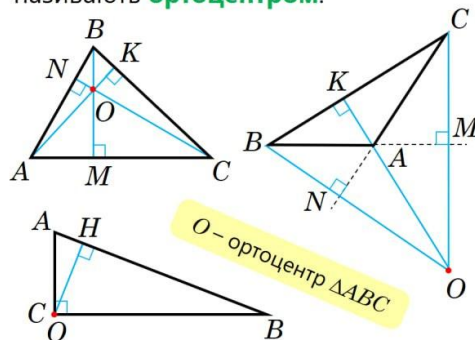
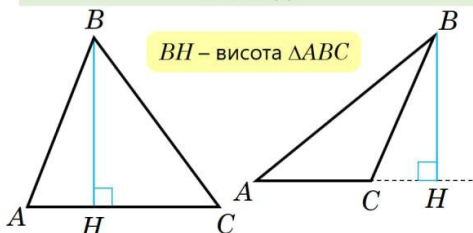
ОЗНАЧЕННЯ

Висота трикутника – це перпендикуляр, опущений з будь-якої вершини трикутника на протилежну сторону або на продовження сторони.

ВЛАСТИВІСТЬ

Висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці, яку називають **ортоцентром**.

ВИГЛЯД

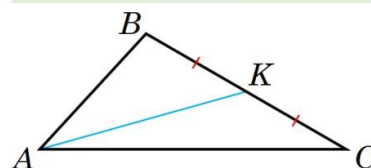


МЕДІАНА ТРИКУТНИКА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

ОЗНАЧЕННЯ

Медіана трикутника – це відрізок прямої, що з'єднує вершину трикутника з серединою протилежної сторони.

ВИГЛЯД



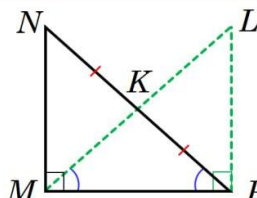
AK – медіана $\triangle ABC$

$$BK = KC$$

ВЛАСТИВІСТЬ

У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

$$MK = \frac{NP}{2}$$



ДОВЕДЕННЯ

1. Проведемо $LP \perp MP$ так, що $LP = MN$.
2. $\triangle NMP = \triangle LPN$ (за 2 катетами).
3. $\angle NPM = \angle LMP$.
4. $\triangle MKP$ – рівнобедрений.
5. $MK = KP = \frac{NP}{2}$.

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ МЕДІАН ТРИКУТНИКА

ТЕОРЕМА

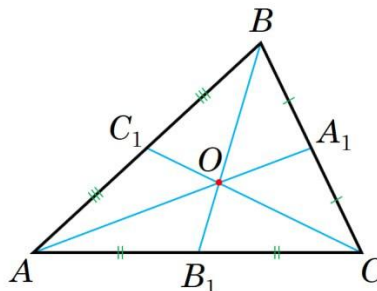
Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожную з них у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{2}{1}$$

ЦЕНТРОЇД ТРИКУТНИКА

Точку перетину медіан називають **центроїдом** або **цетром мас трикутника**.

ВИГЛЯД



O — центроїд $\triangle ABC$.

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ БІСЕКТРИС

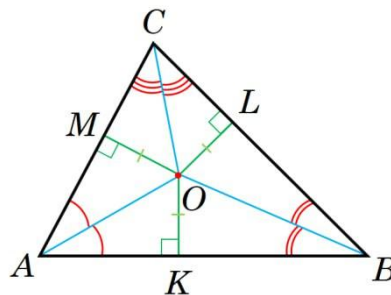
НАСЛІДОК

Усі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

ДОВЕДЕННЯ

1. $OM = OK$ як перпендикуляри, проведені до сторін $\angle A$ з бісектриси $\angle A$.
2. Аналогічно, $OM = OL$ для бісектриси $\angle B$.
3. Якщо $OM = OL$, а CO — спільна гіпотенуза $\triangle CMO$ і $\triangle CLO$, то $\triangle CMO = \triangle CLO$ (за катетом і гіпотенузою). Тоді $\angle MCO = \angle LCO$.
4. Таким чином, CO — бісектриса $\angle C$ $\triangle ABC$.
5. Отже, O — точка перетину бісектрис $\triangle ABC$.

ВИГЛЯД



O — інцентр $\triangle ABC$.

СЕРЕДИННИЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

ОЗНАЧЕННЯ

Серединний перпендикуляр — це пряма, що проходить через середину відрізка, перпендикулярно до нього.

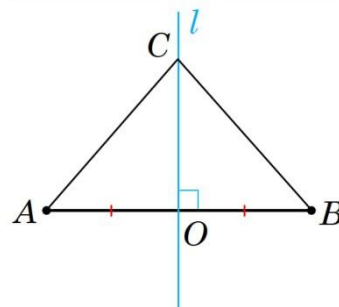
ВЛАСТИВІСТЬ

Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.

ДОВЕДЕННЯ

1. Нехай пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB , O — середина цього відрізка.
2. Якщо точка C збігається з O , то $AC = BC$.
3. Якщо точка C відмінна від O , то $\triangle COA = \triangle COB$ за двома катетами. Тому $AC = BC$.

ВИГЛЯД



l — серединний перпендикуляр до відрізка AB

$$AO = OB$$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

ОЗНАЧЕННЯ

Подібні трикутники – це трикутники, у яких відповідні сторони пропорційні.

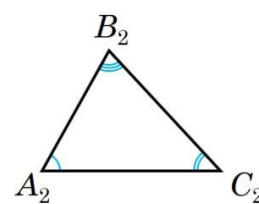
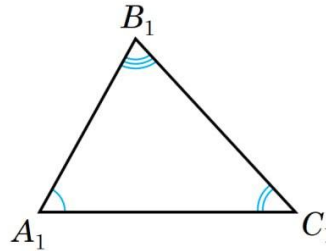
ПОЗНАЧЕННЯ

$$\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_2 B_2 C_2$$

ВЛАСТИВІСТЬ

Подібні трикутники мають однакові відповідні кути.

ВИГЛЯД



$$\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{B_1 C_1}{B_2 C_2} = \frac{A_1 C_1}{A_2 C_2} = k$$

$$\frac{P_{\Delta A_1 B_1 C_1}}{P_{\Delta A_2 B_2 C_2}} = k$$

$$\angle A_1 = \angle A_2$$

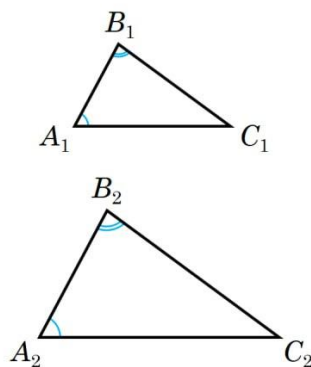
$$\angle B_1 = \angle B_2$$

$$\angle C_1 = \angle C_2$$

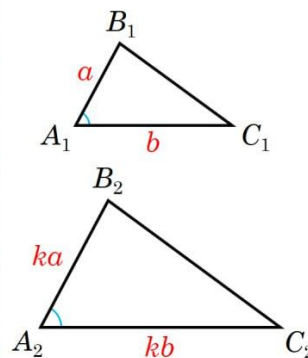
k – коефіцієнт подібності

ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

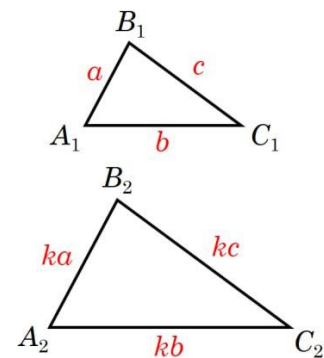
1 За двома кутами



2 За двома пропорційними сторонами і кутом між ними

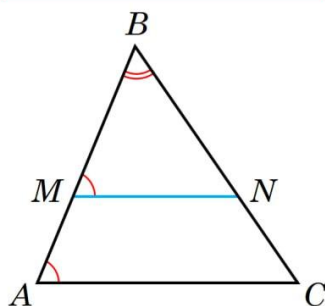


3 За трьома пропорційними сторонами



ПОШИРЕНІ ВИПАДКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

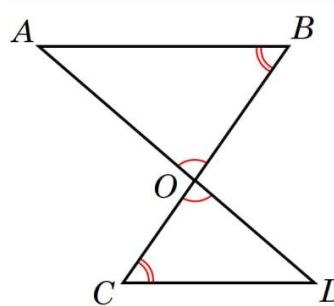
ВИПАДОК 1



$$MN \parallel AC$$

$$\Delta MBN \sim \Delta ABC$$

ВИПАДОК 2

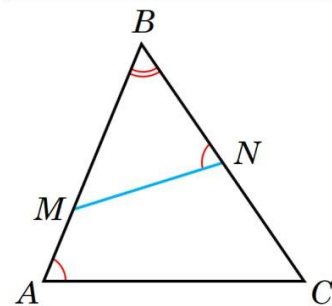


$$AB \parallel CD$$

$$AD \cap BC = O$$

$$\Delta AOB \sim \Delta DOC$$

ВИПАДОК 3



$$\angle A = \angle N$$

$$\Delta MBN \sim \Delta CBA$$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

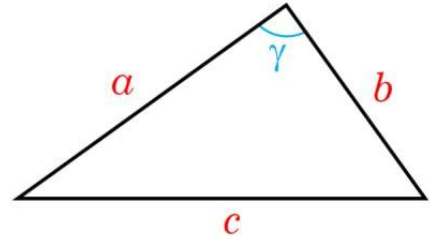
ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ ТА ЇЇ НАСЛІДКИ

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

ВИГЛЯД



НАСЛІДКИ

- 1 Якщо $c^2 < a^2 + b^2$, то кут γ — гострий (оскільки $\cos \gamma > 0$).
- 2 Якщо $c^2 = a^2 + b^2$, то кут γ — прямий (оскільки $\cos \gamma = 0$).
- 3 Якщо $c^2 > a^2 + b^2$, то кут γ — тупий (оскільки $\cos \gamma < 0$).

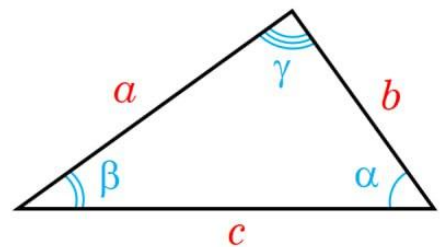
ТЕОРЕМА СИНУСІВ ТА ЇЇ НАСЛІДКИ

ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

ВИГЛЯД



НАСЛІДКИ

- 1 У трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона.
- 2 У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.

$$\text{Якщо } \alpha < \beta < \gamma, \text{ то } a < b < c$$

$$\text{Якщо } a < b < c, \text{ то } \alpha < \beta < \gamma$$

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

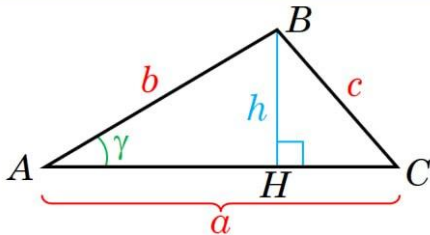
ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

ЗА СТОРОНОЮ І ВИСОТОЮ

Площа S трикутника півдобутку сторони a та висоти h , проведеної до цієї сторони:

$$S = \frac{1}{2}ah$$

ВИГЛЯД



ЗА ДВОМА СТОРОНАМИ І КУТОМ МІЖ НИМИ

Площа S трикутника півдобутку сторін a і b та на синус кута γ між ними:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

ДОВЕДЕННЯ

1. Нехай у $\triangle ABC$: $AC = a$, $AB = b$, $\angle A = \gamma$.
2. Проведемо висоту BH .
3. У $\triangle ABH$: $BH = AB \sin \angle A = b \sin \gamma$.
4. Тоді площа $\triangle ABC$:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

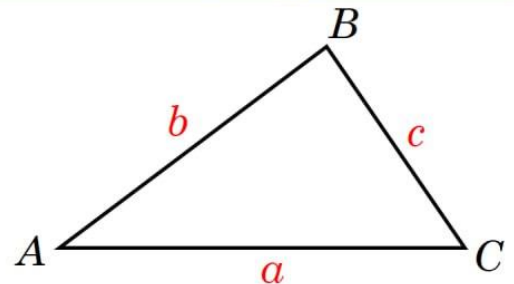
ЗА ТРЬОМА СТОРОНАМИ

Площа S трикутника зі сторонами a , b , c можна знайти за **формулою Герона**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника

ВИГЛЯД



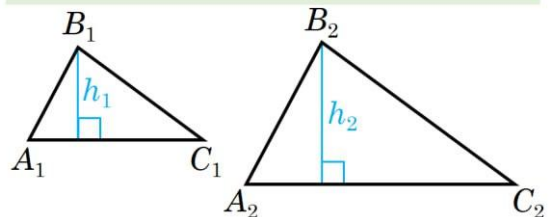
ПЛОЩІ ПОДІБНИХ ТРИКУТНИКІВ

ПЛОЩІ ПОДІБНИХ ТРИКУТНИКІВ

Площі подібних трикутників відносяться як коефіцієнт подібності у квадраті:

$$\frac{S_{\triangle A_1 B_1 C_1}}{S_{\triangle A_2 B_2 C_2}} = k^2$$

ВИГЛЯД



ДОВЕДЕННЯ

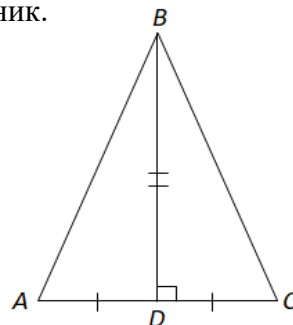
1. Опустимо висоти h_1 та h_2 з вершин B_1 та B_2 .
2. Маємо: $\frac{A_1 C_1}{A_2 C_2} = \frac{h_1}{h_2} = k$, звідки $A_1 C_1 = k \cdot A_2 C_2$ і $h_1 = k \cdot h_2$.
3. Отже, $\frac{S_{\triangle A_1 B_1 C_1}}{S_{\triangle A_2 B_2 C_2}} = \frac{\frac{1}{2} A_1 C_1 \cdot h_1}{\frac{1}{2} A_2 C_2 \cdot h_2} = \frac{k \cdot A_2 C_2 \cdot k \cdot h_2}{A_2 C_2 \cdot h_2} = k^2$.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Які з наведених тверджень є правильними?

- I. Серединний перпендикуляр, проведений до сторони рівностороннього трикутника, ділить його на два рівних трикутники.
- II. Точка перетину серединних перпендикулярів, проведених до катетів прямокутного трикутника, є серединою його гіпотенузи.
- III. Точка перетину серединних перпендикулярів, проведених до сторін будь-якого тупокутного трикутника, міститься всередині цього трикутника.

- A. лише I.
- Б. лише I та II.
- В. лише I та III.
- Г. лише II та III.
- Д. I, II та III.



- I. Серединний перпендикуляр до сторони рівностороннього трикутника ділить його на два рівних трикутники. $\triangle ADB = \triangle CDB$ (за двома катетами). Твердження є правильним.
- II. Точка перетину серединних перпендикулярів трикутника є центром описаного кола. У прямокутному трикутнику центр описаного кола – середина гіпотенузи. Отже, твердження є правильним.
- III. У тупокутному трикутнику центр описаного кола знаходиться поза трикутником. Отже, твердження є неправильним.

Відповідь: Б.

Зовнішній кут при вершині A трикутника ABC дорівнює 100° , $\angle C = 20^\circ$ (див. рисунок). Визначте градусну міру кута B.

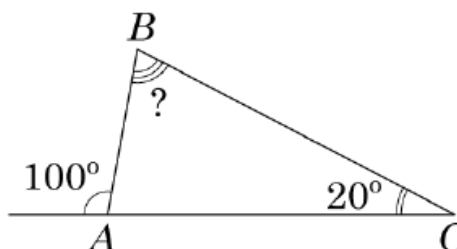
A	Б	В	Г	Д
100°	90°	120°	80°	70°

За властивістю зовнішнього кута трикутника:

$$\angle DAB = \angle B + \angle C.$$

$$\text{Отже, } \angle B = 100^\circ - 20^\circ = 80^\circ.$$

Відповідь: Г.



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Якому значенню серед наведених може дорівнювати довжина сторони АС трикутника АВС, якщо $AB = 3$ см, $BC = 10$ см?

А	Б	В	Г	Д
3 см	5 см	7 см	11 см	15 см

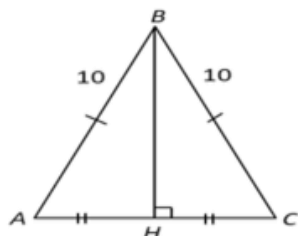
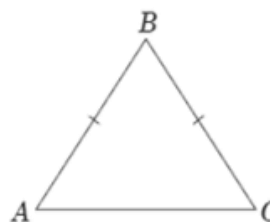
Це завдання перевіряє вміння визначати можливе значення невідомої сторони трикутника, використовуючи нерівність трикутника: будь-яка сторона трикутника менше за суму двох інших його сторін та більше за їх різницю. Оскільки сторони трикутника АВ і ВС дорівнюють відповідно 3 см та 10 см, то довжина сторони АС повинна бути більшою за $10 - 3 = 7$ см та меншою за $10 + 3 = 13$ см. Цю умову задовольняє лише варіант Г.

Відповідь: Г.

Периметр рівнобедреного трикутника АВС (див. рисунок) дорівнює 32 см. $AB = BC = 10$ см. Узгодьте відрізок (1–3) з його довжиною (А – Д).

Відрізок
1 АС
2 висота, проведена з вершини В
3 радіус кола, описаного навколо трикутника АВС

Довжина відрізка, см
А 6,25
Б 7,5
В 8
Г 12
Д 12,5



$P = 32$ см, $AB = BC = 10$ см.

1 – Г. $P = AB + BC + AC = 10 + 10 + AC = 32$, $AC = 12$ см.

2 – В. Висота $BH \perp AC$, BH – медіана, $AC = 12$ см, $AH = HC = 6$ см. $\triangle ABH$ прямокутний ($\angle H = 90^\circ$), за теоремою Піфагора $BH = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ см.

3 – А. $\triangle ABH$ прямокутний ($\angle H = 90^\circ$), $\sin \angle A = \frac{BH}{AB} = \frac{8}{10} = 0,8$.

За наслідком із теореми синусів:

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R, \quad \frac{10}{0,8} = 2R, \quad R = \frac{10}{1,6} = \frac{100}{16} = 6,25 \text{ см.}$$

Відповідь: 1Г, 2В, 3А.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Установіть відповідність між початком речення (1–3) і його закінченням (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Рис. 1



Рис. 2

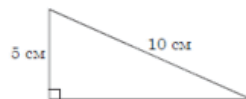


Рис. 3

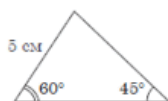


Рис. 4

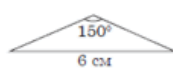


Рис. 5

Початок речення

- 1 Трикутник, у якого центри вписаного й описаного кіл збігаються, зображено на
- 2 Трикутник, один із внутрішніх кутів якого дорівнює 30° , зображено на
- 3 Трикутник, у якого радіус описаного кола більший за 5 см, зображено на

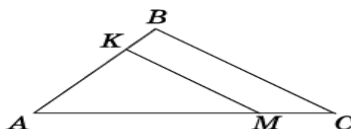
Закінчення речення

А рис. 1. Б рис. 2. В рис. 3. Г рис. 4. Д рис. 5.

1. Рис. 1 – рівносторонній трикутник, отже, центри вписаного та описаного кіл збігаються, 1 - А.
2. Рис. 3 – оскільки катет прямокутного трикутника в 2 рази менше гіпотенузи, то він лежить напроти кута 30° . Отже, 2 - В.
3. Рис. 5 – за теоремою синусів: $6/\sin 150^\circ = 2R$, $6/\sin 30^\circ = 2R$, $R = 6/(2 \cdot \frac{1}{2}) = 6$ см, радіус більший за 5 см, отже, 3 - Д.

Відповідь: 1А, 2В, 3Д.

На сторонах АВ та АС трикутника АВС задано точки К і М відповідно, $KM \parallel BC$ (див. рисунок).
Визначте довжину відрізка КМ, якщо $AK=6$ см, $KB=2$ см, $BC=10$ см.



А	Б	В	Г	Д
6 см	7 см	7,5 см	8 см	8,5 см

Це завдання перевіряє вміння знаходити подібні трикутники та використовувати пропорційність їх сторін для знаходження невідомих елементів трикутників.

Оскільки за умовою $KM \parallel BC$, то $\angle AKM = \angle ABC$ як відповідні кути при паралельних прямих КМ та ВС та січній АК. Тоді трикутники АКМ і АВС подібні за двома кутами ($\angle A$ - спільний).

Якщо трикутники подібні, то їх відповідні сторони пропорційні, отже $\frac{AK}{AB} = \frac{KM}{BC}$, де $AB = AK + KB = 6 + 2 = 8$ см, звідси $KM = \frac{AK \cdot BC}{AB} = \frac{6 \cdot 10}{8} = 7,5$ см.

Відповідь: В.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

У трикутнику ABC кут B-тупий. Які з наведених тверджень є правильними?

I. $\angle A + \angle C < 90^\circ$.

II. $AB + BC < AC$.

III. Центр кола, описаного навколо трикутника ABC, лежить поза його межами.

А	Б	В	Г	Д
лише I і II	лише I	лише II та III	I, II і III	лише I і III

Це завдання перевіряє вміння класифікувати трикутники за сторонами та кутами, знання теореми про суму кутів трикутника, кола, описаного навколо трикутника.

Якщо $\angle B$ - тупий, а сума кутів трикутника 180° ,

то $\angle B > 90^\circ$, $\angle A + \angle C < 90^\circ$.

За нерівністю трикутника $AC < AB + BC$.

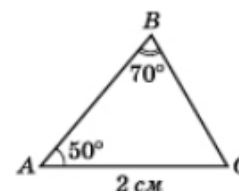
Отже, твердження II неправильне.

Центр кола, описаного навколо тупокутного трикутника ABC лежить поза його межами.

Отже, правильна відповідь – Д.

Відповідь: Д.

У трикутнику ABC задано $AC = 2$ см, $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ (див. рисунок). Визначте BC (у см) за теоремою синусів.



А	Б	В	Г	Д
$BC = \frac{2 \sin 70^\circ}{\sin 50^\circ}$	$BC = \frac{\sin 50^\circ}{2 \sin 70^\circ}$	$BC = \frac{2}{\sin 50^\circ \sin 70^\circ}$	$BC = \frac{\sin 70^\circ}{2 \sin 50^\circ}$	$BC = \frac{2 \sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}$

За теоремою синусів:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}; \quad BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}.$$

Відповідь: Д.

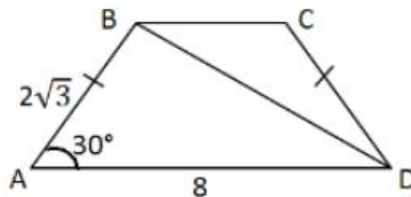
ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

На рисунку зображено рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює $2\sqrt{3}$, а більша основа – 8. Визначте довжину діагоналі цієї трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 30° .



А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{28}$	$\sqrt{52}$	$\sqrt{76 + 16\sqrt{3}}$	$\sqrt{76 - 16\sqrt{3}}$	$\sqrt{124}$

Це завдання перевіряє знання теореми косинусів.



У $\triangle ABD$ знаходимо сторону BD за теоремою косинусів:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A = (2\sqrt{3})^2 + 8^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 12 + 64 - 48 = 28.$$

$$BD = \sqrt{28}.$$

Відповідь: А.

У трикутнику ABC : $AB = 6$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$. Обчисліть довжину медіани, проведеної з вершини C .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{5}$ см	$\sqrt{14}$ см	$2\sqrt{2}$ см	$\sqrt{7}$ см	$\sqrt{17}$ см

Це завдання перевіряє знання теореми косинусів, уміння знаходити невідомі елементи трикутника.

CD – медіана, $AD = DB = 3$ см.

У $\triangle BDC$ за теоремою косинусів

$$DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2 \cdot BD \cdot BC \cdot \cos B = 9 + 2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 11 - 6 = 5$$

$$DC = \sqrt{5} \text{ см.}$$

Відповідь: А.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

У трикутнику ABC : $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

Закінчення речення

1 Якщо $a = b = c$

А $\angle C = 30^\circ$.

2 Якщо $c^2 = a^2 + b^2$

Б $\angle C = 45^\circ$.

3 Якщо $a = c = \frac{b}{\sqrt{2}}$,

В $\angle C = 60^\circ$.

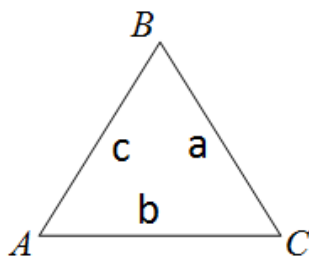
4 Якщо $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$,

Г $\angle C = 90^\circ$.

Д $\angle C = 120^\circ$.

Доберемо до кожного із запитань 1 – 4 правильну відповідь.

1. Якщо $a = b = c$, то $\triangle ABC$ – рівносторонній.

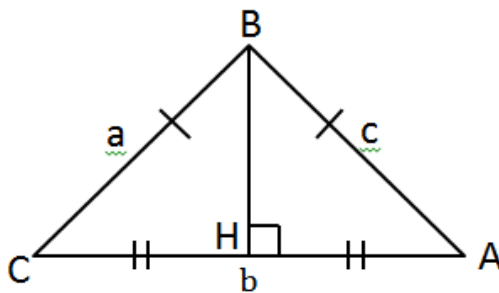


Усі кути рівностороннього трикутника дорівнюють 60° , $\angle C = 60^\circ$.

Отже, 1 – В.

2. Якщо $c^2 = a^2 + b^2$, то $\triangle ABC$ – прямокутний за наслідком з теореми косинусів. Отже 2, – Г.

3. Якщо $a = c = \frac{b}{\sqrt{2}}$, то $\triangle ABC$ – рівнобедрений з бічними сторонами $a = c$ та основою b .



$BH \perp AC$. Так як $CB = BA$, то $CH = HA = \frac{b}{2}$ (висота є медіаною).

У $\triangle BHC$ ($\angle H = 90^\circ$), $\cos C = \frac{CH}{CB}$, $\cos C = \frac{b/2}{a} = \frac{b/2}{b/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$C = 45^\circ$. Отже, 3 – Б.

4. Якщо $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ за теоремою косинусів $\cos C = -\frac{1}{2}$, $\angle C = 120^\circ$. Отже, 4 – Д.

ВІДЕО БЛОК



Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!

Відеоуроки:

1. [Трикутники](#)
2. [Теорема синусів](#)
3. [Узагальнена теорема синусів](#)
4. [Теорема косинусів](#)
5. [Наслідки з теореми косинусів](#)
6. [Відео-розбір завдань НМТ з теми «Трикутники»](#)



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

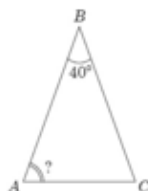
**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

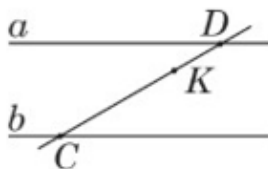
Завдання з вибором однієї правильної відповіді

1. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC $\angle B = 40^\circ$. Визначте градусну міру кута A . № 5, 2021д



А	Б	В	Г	Д
80°	70°	60°	50°	40°

2. На рисунку зображено паралельні прямі a і b та січну CD . Знайдіть відстань між прямими a і b , якщо $CK = 5$ см, $KD = 2$ см, а відстань від точки K до прямої a дорівнює 1 см. № 11, 2018

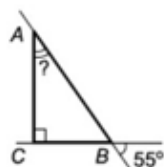


А	Б	В	Г	Д
2,5 см	3 см	3,5 см	4 см	4,5 см

3. Визначте градусну міру кута B трикутника ABC , якщо $\angle A + \angle C = 70^\circ$ №2, 2016д

А	Б	В	Г	Д
20°	70°	110°	145°	160°

4. Катет CB і гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC лежать на прямих, що перетинаються під кутом 55° (див. рисунок). Визначте градусну міру $\angle CAB$. № 1, 2015_II



А	Б	В	Г	Д
15°	25°	35°	45°	55°

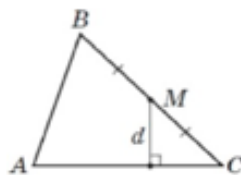
САМОСТІЙНИЙ БЛОК

5. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). Визначте градусну міру кута BAC , якщо $\angle B = 40^\circ$. № 2, 2015_I



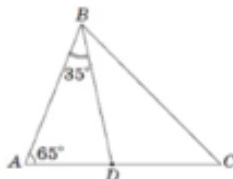
А	Б	В	Г	Д
80°	70°	60°	50°	40°

6. У трикутнику ABC точка M – середина сторони BC , $AC = 24$ см (див. рисунок). Знайдіть відстань d від точки M до сторони AC , якщо площа трикутника ABC дорівнює 96 см^2 . 16, 2013_II



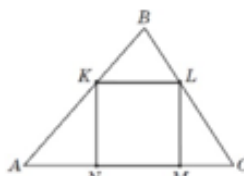
А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	6 см	8 см

7. У трикутнику ABC : $\angle A = 65^\circ$, BD – бісектриса кута B (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута BCA , якщо $\angle ABD = 35^\circ$. № 6, 2013_I



А	Б	В	Г	Д
35°	45°	50°	55°	80°

8. У трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. рисунок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC , дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AC = 10$ см. № 20, 2013_I



А	Б	В	Г	Д
7,5 см	12,5 см	17,5 см	15 см	20 см

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

9. У прямокутнику $ABCD$: $BC = 80$, $AC = 100$. Через точки M і K , що належать сторонам AB і BC відповідно, проведено пряму, паралельну AC . Знайдіть довжину більшої сторони трикутника MBK , якщо $BK = 20$. № 18, 2012_I

А	Б	В	Г	Д
60	50	30	25	15

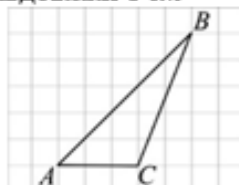
10. Доберіть таке закінчення речення, щоб утворилося правильне твердження: «Сума квадратів катетів прямокутного трикутника дорівнює...». № 5, 2011

- А гіпотенузі
- Б квадрату суми катетів
- В квадрату гіпотенузи
- Г добутку катетів
- Д подвійному добутку катетів

11 У трикутнику ABC . $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Пряма a , паралельна стороні AB , перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Обчисліть периметр трикутника MNC , якщо $MC = 5$ см. № 21, 2011

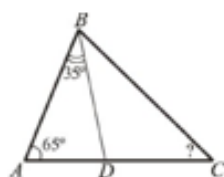
А	Б	В	Г	Д
15 см	24 см	48 см	21 см	26 см

12. На папері у клітинку зображено трикутник ABC , вершини якого збігаються з вершинами клітинок (див. рисунок). Знайдіть площу трикутника ABC , якщо кожна клітинка є квадратом зі стороною завдовжки 1 см № 16, 2010_I



А	Б	В	Г	Д
15 см^2	$8,5 \text{ см}^2$	8 см^2	$7,5 \text{ см}^2$	7 см^2

13. У трикутнику ABC : $\angle A = 65^\circ$, BD – бісектриса кута B (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута BCA , якщо $\angle ABD = 35^\circ$. № 2, 2009

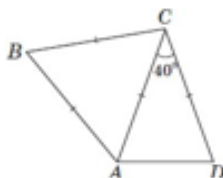


А	Б	В	Г	Д
35°	45°	50°	55°	65°

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

Завдання на встановлення відповідності

14. Рівносторонній трикутник ABC та рівнобедрений трикутник ACD , у якому $AC = DC$ і $\angle ACD = 40^\circ$, лежать в одній площині (див. рисунок). Установіть відповідність між кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д). № 23, 2017д



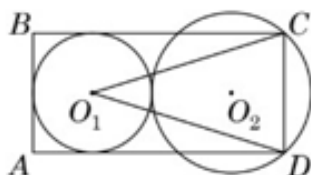
Вираз

- 1 $\angle ABC$
- 2 $\angle ADC$
- 3 кут між прямими AB і AD
- 4 кут між бісектрисами кутів BAC і CAD

Твердження про значення виразу

- | | |
|---|------------|
| А | 45° |
| Б | 50° |
| В | 60° |
| Г | 65° |
| Д | 70° |

Завдання відкритої форми з короткою відповіддю

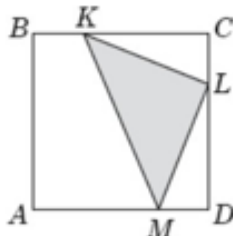


15. На рисунку зображено прямокутник $ABCD$ та два кола, що мають зовнішній дотик. Коло із центром в точці O_1 дотикається сторін AB , BC та AD , а коло із центром в точці O_2 проходить через вершини C та D . Відстань від точки O_2 до вершини C та сторони CD дорівнюють 20 см і 12 см відповідно.

1. Визначте радіус меншого кола (у см).
2. Обчисліть площу трикутника DO_1C (у см^2).

№ 26, 2020

16. На рисунку зображено квадрат $ABCD$. Точки K , L , M належать сторонам BC , CD та AD відповідно. $BK = 8$ см. Трикутники KCL та LDM рівні. $KC = LD = 15$ см.



1. Визначте довжину відрізка KL (у см).
2. Обчисліть площу трикутника KLM (у см^2).

№ 26, 2019д

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

Правильні відповіді:

1. Б.
2. В
3. В
4. В
5. Б
6. В
7. Б
8. Г
9. Г
10. В
11. Б
12. Г
13. Б
14. 1-В, 2-Д, 3-Б, 4-Г
15. 1. 16, 2. 768
16. 1. 17, 2. 144,5

