

ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА
З ТЕМИ:
«Відстані у просторі.
Теорема про три
перпендикуляри»

Укладач: Вінник Дар'я Володимирівна

**Комунальний заклад Желаннівський навчально-виховний комплекс
Очеретинської селищної військово-цивільної адміністрації
Покровського району Донецької області**

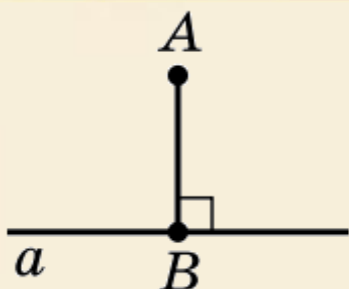
ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Відстані у просторі

1. Відстань від точки до прямої



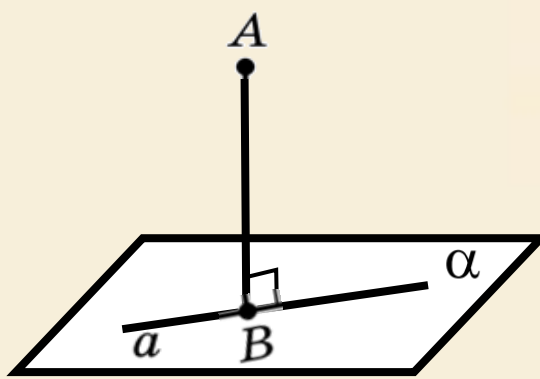
відстань від точки до прямої – це довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до цієї прямої.



2. Відстань від точки до площини



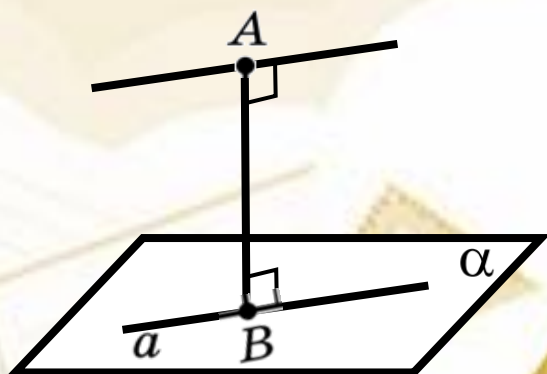
відстань від точки до площини – це довжина перпендикуляра, проведеного із цієї точки до цієї площини.



3. Відстань від прямої до площини



Відстанню від прямої до паралельної їй площини називають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки прямої до площини.

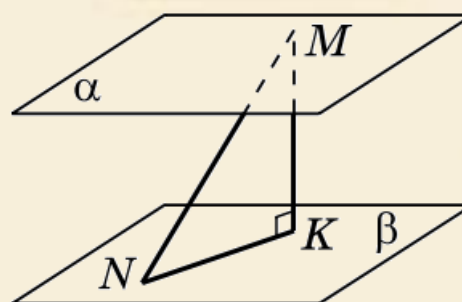
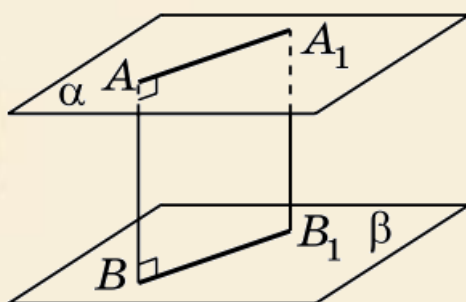


ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

4. Відстань між площинами



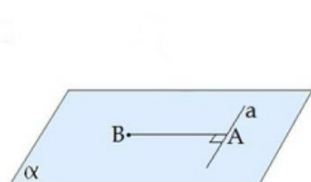
Відстанню між двома паралельними площинами називають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї площини до другої.



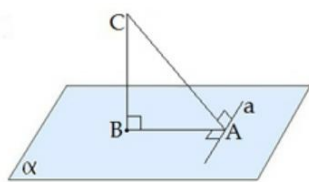
Теорема про три перпендикуляри (ТТП)



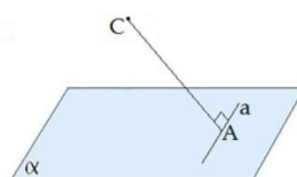
Теорема (про три перпендикуляри). Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.



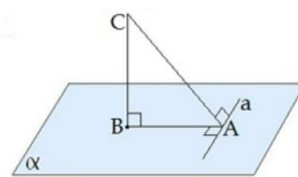
$$a \perp AB$$



$$\left. \begin{array}{l} a \perp AB \\ BC \perp BA \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp CA$$



$$a \perp AC$$



$$\left. \begin{array}{l} a \perp AC \\ BC \perp BA \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp BA$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Відстань від точки до площини

Задача У прямокутнику $ABCD$ зі сторонами $AB = 6$ см, $BC = 8$ см діагоналі перетинаються в точці O , OK – перпендикуляр до площини прямокутника. Знайти відстань від точки K до площини прямокутника, якщо $AK = 13$ см.

Розв'язання. $OK \perp (ABC)$, тому OK – шукана відстань

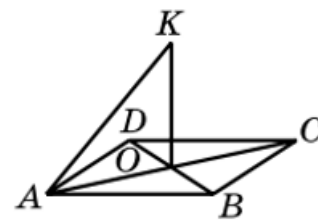
1) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

2) $AO = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (см).

3) У $\triangle AOK$ ($\angle O = 90^\circ$):

$OK = \sqrt{AK^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Відповідь. 12 см.



Відстань від прямої до площини

Задача $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, ребро якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайти відстань від прямої BC до площини $AB_1 C_1$.

Розв'язання Оскільки $BC \parallel B_1 C_1$, то пряма BC паралельна площині $AB_1 C_1$.

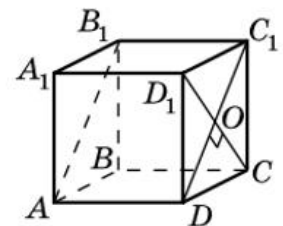
2) $CD_1 \perp C_1 D$, точка O – точка перетину діагоналей грані $CD_1 C_1 D$.

3) $CO \perp AB_1 C_1$, тому CO – шукана відстань.

4) $CD_1 = CD \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$ (см).

5) $CO = \frac{CD_1}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (см).

Відповідь. 4 см.

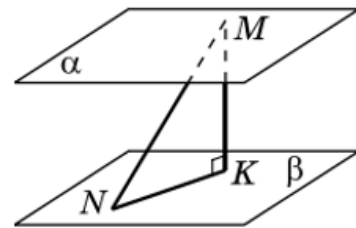


ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Відстань між площинами

Задача Кінці відрізка MN завдовжки 17 см належать паралельним площинам α і β . Проекція відрізка на одну із цих площин дорівнює 8 см. Знайти відстань між площинами α і β .

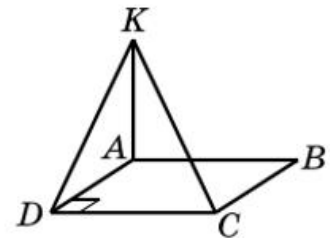
- Розв'язання. 1) Проведемо MK – перпендикуляр до площини β
- 2) Тоді MK – шукана відстань, а NK – проекція MN на площину β , $NK = 8$ см.
- 3) Із $\triangle MNK$ ($\angle K = 90^\circ$):
 $MK = \sqrt{MN^2 - NK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см).
- Відповідь. 15 см.



Теорема про три перпендикуляри

Задача З вершини A квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр AK до площини квадрата. Знайти S_{ABCD} , якщо $KD = 6$ см, $KC = 10$ см.

- Розв'язання. Нехай $ABCD$ – квадрат, $AK \perp (ABC)$, тоді KD – похила, AD – її проекція
- 1) Оскільки $AD \perp DC$, то, за теоремою про три перпендикуляри, $KD \perp DC$.
- 2) Із $\triangle KDC$ ($\angle D = 90^\circ$):
 $DC = \sqrt{KC^2 - KD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).
- 3) Тоді $S_{ABCD} = 8^2 = 64$ (см²).
- Відповідь. 64 см².



ВІДЕО БЛОК

Відстані у просторі



**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**

Теорема про три
перпендикуляри



Відстані у просторі



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**

Відстані у просторі



Відстані у просторі



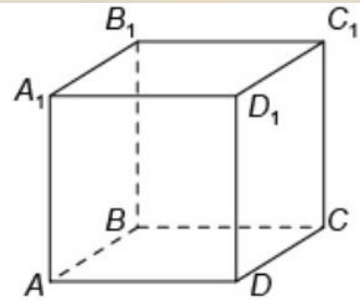
**Теорема про три
перпендикуляри**



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро якого дорівнює 1 см. Обчисліть відстань від точки A до прямої $B_1 C_1$.

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	$\sqrt{2}$ см	3 см	1,5 см

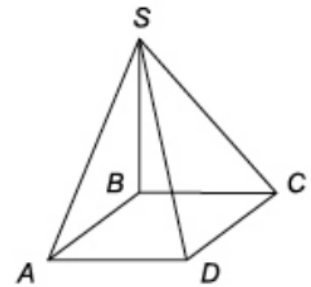


1

2

З вершини B квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр SB до площини цього квадрата (див. рисунок). Які з наведених тверджень є правильними?

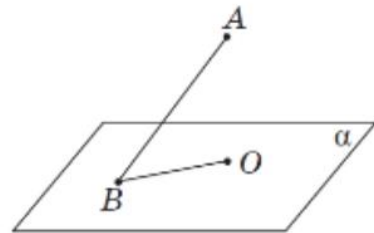
- I. $\angle SBA = 90^\circ$.
- II. $\angle SAD = \angle SDA$.
- III. $\angle SAD = 90^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I і II	лише I і III	лише III	I, II і III

Відрізок OB є проекцією похилої AB на площину α (див. рисунок). Які з наведених тверджень є правильними?

- I. Відрізки AB і OB перпендикулярні.
- II. Відрізки AB і OA перпендикулярні.
- III. Відрізки OB і OA перпендикулярні.



3

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II та III	лише I та II	лише III	лише II

4

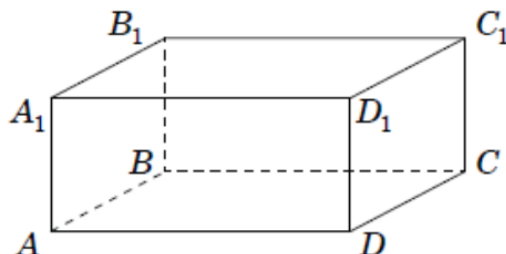
Периметр основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 72 см. Визначте довжину висоти піраміди, якщо її апофема дорівнює 15 см

А	Б	В	Г	Д
6 см	9 см	10 см	12 см	14 см

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

5

На рисунку зображено прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у якому $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 2$. Увідповідніть початок речення (1-3) із його закінченням (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

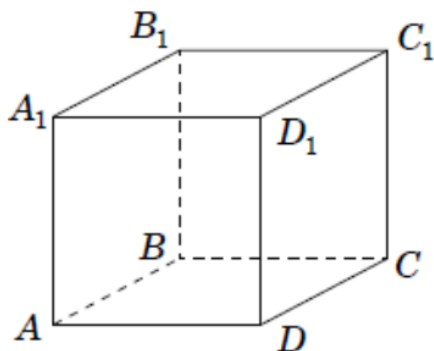
Закінчення речення

- 1 Відстань від точки C до площини $(AA_1 B_1)$ дорівнює
- 2 Відстань від точки A до прямої CC_1 дорівнює
- 3 Відстань між площинами (ABC) і $(A_1 B_1 C_1)$ дорівнює

- А 2.
- Б 3.
- В 4.
- Г 5.
- Д 7.

6

На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро якого дорівнює 2. До кожного початку речення (1-3) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

Закінчення речення

- 1 Довжина діагоналі куба дорівнює
- 2 Відстань від точки A до прямої $A_1 C_1$ дорівнює
- 3 Відстань від точки A до площини $(BB_1 D_1)$ дорівнює

- А 2.
- Б $2\sqrt{2}$.
- В $2\sqrt{3}$.
- Г $\sqrt{3}$.
- Д $\sqrt{2}$.

ВІДПОВІДІ ДО САМОСТІЙНОГО БЛОКУ

№ завдання	Відповідь
1	В
2	В
3	Г
4	Г
5	1-В, 2-Г, 3-А
6	1-Б, 2-А, 3-Д

ПОРАДНИК

Загальні поради при розв'язуванні задач у просторі

1. Робіть малюнок — навіть приблизне зображення значно допоможе зорієнтуватися.
2. Позначайте всі відомі величини — довжини, кути, прямі, площини.
3. Чітко визначайте, що треба знайти — відстань між точками, від точки до площини, між мимобіжними прямими тощо.
4. Використовуйте координати, якщо можливо — це часто спрощує розрахунки.
5. Перевіряйте, чи є прямокутні трикутники — зручно використовувати теорему Піфагора.



Теорема про три перпендикуляри

Ця теорема часто використовується при роботі з похилими та перпендикулярними відрізками:

1. Суть теореми:

Якщо похила проведена з точки до площини, а проекція похилої перпендикулярна до деякої прямої в площині, то сама похила перпендикулярна до цієї прямої.

2. Як використовувати:

- В задачі знайдіть три ключові елементи: похилу, її проекцію, і пряму в площині.
- Якщо шукають перпендикулярність — спробуйте застосувати теорему, щоб довести її.
- Якщо вже відомо про перпендикулярність проекції до прямої — з теореми випливає перпендикулярність похилої.



Додаткові поради:

- Розв'язуйте задачі поетапно: **аналіз** → **малюнок** → **план** → **обчислення** → **відповідь**.
- Регулярно практикуйтесь на ЗНО/НМТ-задачах минулих років.
- Не ігноруйте допоміжні побудови — вони часто відкривають шлях до розв'язання.