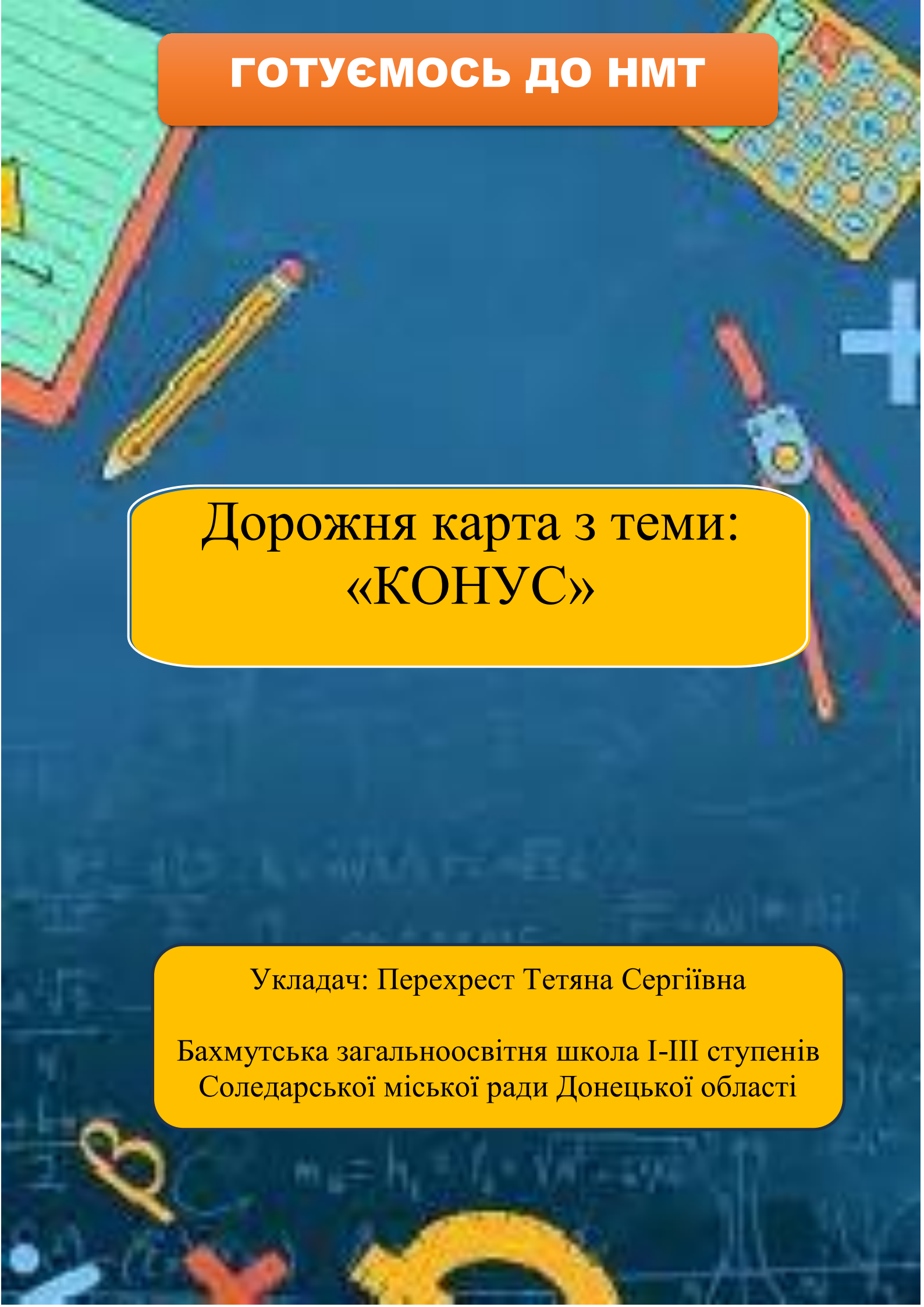




ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

**Дорожня карта з теми:
«КОНУС»**

Укладач: Перехрест Тетяна Сергіївна

**Бахмутська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів
Соледарської міської ради Донецької області**

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК



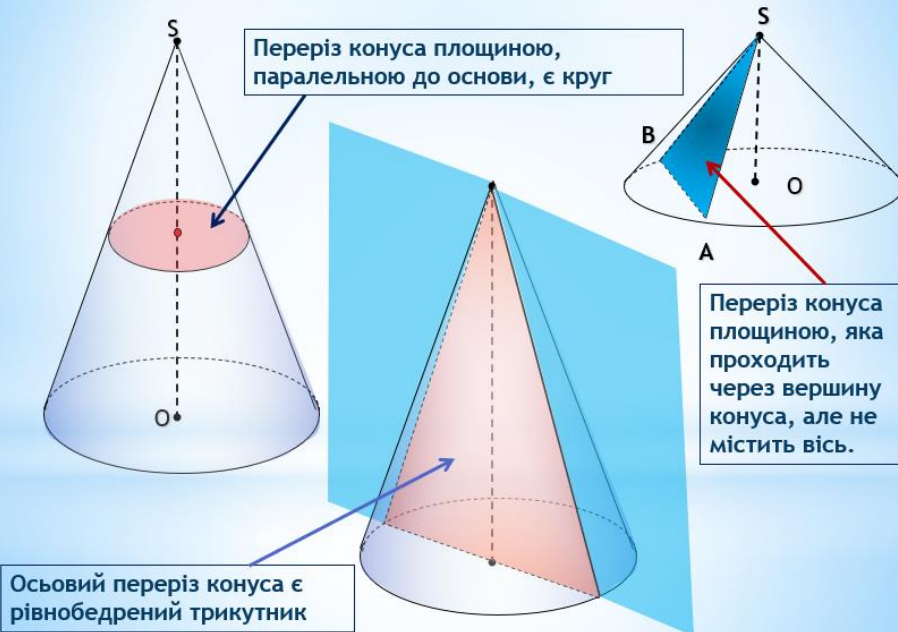
Конус та його елементи

Конус – це тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.



THEORY

Перерізи конуса площинами

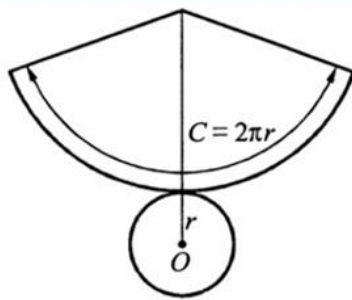


ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Площа бічної поверхні конуса

площа бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн}}$, радіус основи якого дорівнює r , а твірна – l , обчислюється за формулою

$$S_{\text{бічн}} = \pi r l$$



Площа повної поверхні конуса
дорівнює сумі площі бічної поверхні та площі основи:

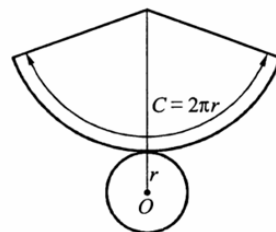
$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{повн}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r \cdot (l + r)$$

Об'єм конуса :

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

(r – радіус, l – твірна,
 h – висота конуса).

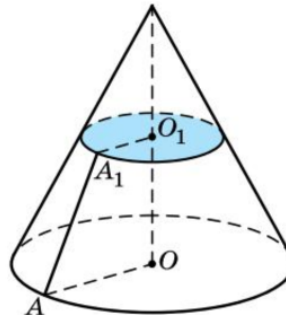


THEORY

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Зрізаний конус

Розглянемо довільний конус і проведемо площину, паралельну його основі. Ця площина перетне конус по колу і поділить конус на дві частини (мал. 6.6). Верхня із цих частин є конусом, а нижню називають *зрізаним конусом*. Основу початкового конуса і круг, отриманий у перерізі, називають *основами зрізаного конуса*, а відрізок, що сполучає їхні центри, – *висотою зрізаного конуса*. На малюнку 6.6 OA і O_1A_1 – радіуси основ зрізаного конуса, OO_1 – висота зрізаного конуса.

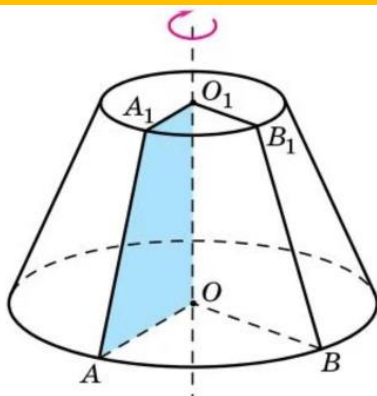


Мал. 6.6

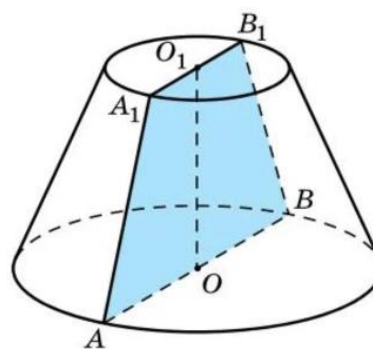
Зрізаний конус можна розглядати і як тіло обертання, яке можна отримати

внаслідок обертання прямокутної трапеції навколо прямої, що містить її меншу бічну сторону. На малюнку 6.7 прямокутна трапеція OO_1A_1A з прямими кутами O і O_1 обертається навколо прямої OO_1 . Цю пряму називають *віссю зрізаного конуса*. Бічна сторона OO_1 трапеції OO_1A_1A є висотою зрізаного конуса, а основи трапеції – радіусами основ зрізаного конуса.

Поверхню, що є результатом обертання більшої бічної сторони AA_1 трапеції OO_1A_1A навколо прямої OO_1 , називають *бічною поверхнею зрізаного конуса*. Кожний відрізок цієї поверхні (а також його довжину), який сполучає найближчі точки кіл основ зрізаного конуса, називають *твірними зрізаного конуса*. На малюнку 6.7 AA_1 і BB_1 – твірні зрізаного конуса. Вони між собою рівні.



Мал. 6.7



Мал. 6.8

Об'єм зрізаного конуса

Теорема 2 (про об'єм зрізаного конуса). Об'єм V зрізаного конуса з висотою h і радіусами основ R і r можна знайти за формулою

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

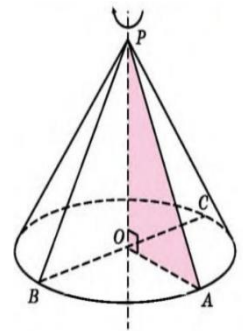
Задача 1. Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 17 см, а катет – 8 см, обертається навколо цього катета. Знайти площу основи утвореного конуса.

Розв'язання. 1) $PA = l = 17$ см, $PO = h = 8$ см (мал. 6.1).

У $\triangle POA$ ($\angle O = 90^\circ$): $OA = r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см).

2) Тоді площа основи $S = \pi r^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ (см²).

Відповідь. 225π см².



Мал. 6.1

Задача 2. Довжина кола основи конуса дорівнює 8π см. Знайти площу осового перерізу конуса, якщо він є прямокутним трикутником.

Розв'язання. 1) Нехай PAB – осовий переріз конуса, $\angle BPA = 90^\circ$ (мал. 6.2).

2) Позначимо $OB = OA = r$. За умовою $2\pi r = 8\pi$, тоді $r = 4$ см.

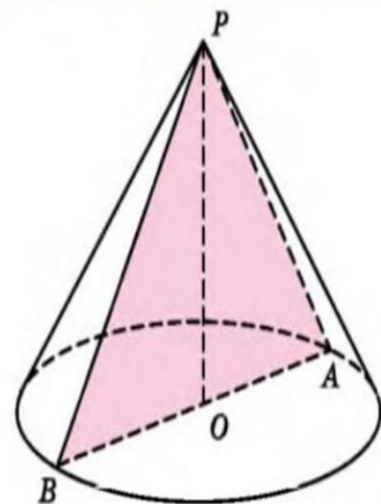
3) $\triangle PBA$ – рівнобедрений прямокутний:

$$\angle PBO = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

4) У $\triangle POB$ ($\angle O = 90^\circ$): $\angle BPO = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, тому $PO = BO = 4$ см.

$$5) S_{\triangle PBA} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PO = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 16 см².



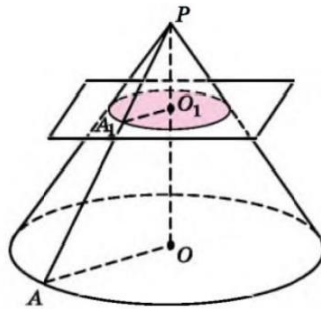
Мал. 6.2

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Задача 3. Висота конуса дорівнює 12 см, а радіус основи – 15 см. На відстані 4 см від вершини конуса проведено переріз площиною, паралельною основі конуса. Знайти радіус цього перерізу.

Розв'язання. 1) За умовою задачі: $OA = 15$ см, $PO = 12$ см, $PO_1 = 4$ см (мал. 6.3).



Мал. 6.3

2) $\triangle PA_1O_1 \sim \triangle PAO$ (за двома кутами), тоді:

$$\frac{PO_1}{PO} = \frac{A_1O_1}{AO}; \frac{4}{12} = \frac{A_1O_1}{15}; A_1O_1 = 5 \text{ см.}$$

Відповідь. 5 см.

Задача 4. Через вершину конуса проведено переріз, який нахилений до площини основи під кутом 60° . Знайти висоту конуса, якщо відстань від центра основи до хорди, по якій переріз перетинає основу, дорівнює $5\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. 1) Нехай PCD – заданий переріз (мал. 6.5).

2) $\triangle PCD$ – рівнобедрений, CD – його основа, проведемо PK – висоту і медіану $\triangle PCD$.

3) Оскільки $PK \perp CD$ і OK – проекція PK на площину основи, то за теоремою про три перпендикуляри матимемо $OK \perp CD$.

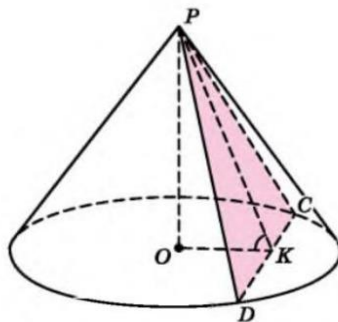
4) Тоді OK – відстань від точки O до хорди CD , $OK = 5\sqrt{3}$ см (за умовою).

5) Оскільки $PK \perp CD$ і $OK \perp CD$, то площина OPK перпендикулярна до хорди CD , тому $\angle PKO$ – кут нахилу перерізу PCD до площини основи. За умовою: $\angle PKO = 60^\circ$.

6) У $\triangle PKO$ ($\angle O = 90^\circ$):

$$\operatorname{tg} \angle PKO = \frac{PO}{OK}; PO = 5\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 15 \text{ (см).}$$

Відповідь. 15 см.



Мал. 6.5

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Задача 5. Знайти об'єм конуса, якщо його осовим перерізом є правильний трикутник зі стороною 6 см.

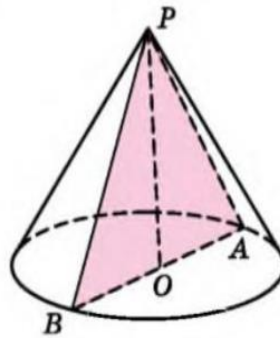
Розв'язання. 1) Нехай $\triangle PAB$ – осовий переріз конуса, $PA = PB = AB = 6$ см (мал. 10.5).

2) Тоді радіус основи $r = \frac{AB}{2} = 3$ (см).

3) У $\triangle POA$ ($\angle O = 90^\circ$):
 $h = PO = \sqrt{AP^2 - OA^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ (см).

4) Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$ (см³).

Відповідь. $9\sqrt{3}\pi$ см³.



Мал. 10.5



Задача 6. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає основу по хорді завдовжки 8 см, яку видно з центра основи під прямим кутом. Знайти об'єм конуса, якщо площа перерізу дорівнює 20 см².

Розв'язання. 1) На малюнку 10.6 зображено конус, у якому проведено переріз PAB , $AB = 8$ см, $\angle AOB = 90^\circ$, площа перерізу $S_{\pi} = 20$ см².

2) Позначимо $OA = OB = r$, тоді у $\triangle OAB$ ($\angle O = 90^\circ$): $r^2 + r^2 = 8^2$, $r = 4\sqrt{2}$ (см).

3) Нехай PK – висота $\triangle PAB$, тоді $S_{\pi} = \frac{1}{2}AB \cdot PK$;

$$PK = \frac{2S_{\pi}}{AB} = \frac{2 \cdot 20}{8} = 5 \text{ (см)}.$$

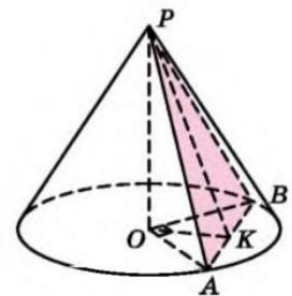
4) Оскільки $PK \perp AB$, то за теоремою про три перпендикуляри $OK \perp AB$. Оскільки $\triangle OAB$ – рівнобедрений ($OA = OB$),

то OK не тільки висота $\triangle OAB$, а й медіана. Тому $OK = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (см) (за властивістю медіани, проведеної до гіпотенузи).

5) У $\triangle OPK$ ($\angle O = 90^\circ$): $h = OP = \sqrt{PK^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

6) Отже, об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 3 = 32\pi$ (см³).

Відповідь. 32π см³.



Мал. 10.6

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Задача 7. Хорду, що лежить в основі конуса, видно з його вершини під кутом 60° , а із центра основи – під прямим кутом. Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює 6 см.

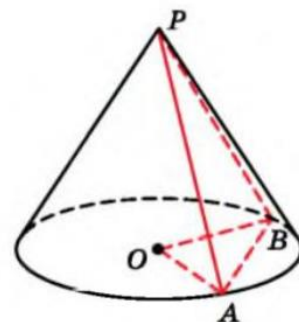
Розв'язання. 1) На малюнку 11.4 зображено конус, де AB – хорда основи, $\angle APB = 60^\circ$, $\angle AOB = 90^\circ$, $PA = PB = l = 6$ см.

2) У $\triangle APB$ ($AP = PB$, $\angle P = 60^\circ$): $\angle PAB = \angle PBA = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$, тому $\triangle APB$ – рівносторонній, $AB = 6$ см.

3) У $\triangle AOB$ ($\angle AOB = 90^\circ$): $r^2 + r^2 = 6^2$; $r = 3\sqrt{2}$ (см).

4) Тоді $S_{\text{бічн}} = \pi r l = \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 18\sqrt{2}\pi$ (см²).

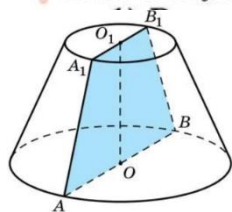
Відповідь. $18\sqrt{2}\pi$ см².



Мал. 11.4

Задача 8. Твірна зрізаного конуса дорівнює 5 см, висота – 4 см, а менший із радіусів основ – 2 см. Знайдіть площу осевого перерізу зрізаного конуса.

Розв'язання. Нехай AA_1B_1B – осевий переріз зрізаного конуса (мал. 6.8), $AA_1 = 5$ см, $OO_1 = 4$ см, $O_1A_1 = 2$ см.



Мал. 6.8

1) Виконаємо планіметричний малюнок перерізу (мал. 6.9) і проведемо в трапеції AA_1B_1B висоту A_1K , тоді $A_1K = OO_1 = 4$ см.

2) Із $\triangle AA_1K$ ($\angle K = 90^\circ$):

$$AK = \sqrt{AA_1^2 - A_1K^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (см)}.$$

Тоді $AO = AK + KO = 3 + 2 = 5$ (см).

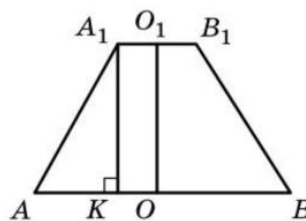
3) $AB = 2AO = 2 \cdot 5 = 10$ (см),

$A_1B_1 = 2A_1O_1 = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

Отже,

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot A_1K = \frac{10 + 4}{2} \cdot 4 = 28 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 28 см².



Мал. 6.9

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Задача 9. У зрізаному конусі радіус меншої основи дорівнює 5 см. Висота конуса дорівнює 4 см, а його твірна утворює з площиною більшої основи кут 45° . Знайти об'єм конуса. Розв'язання. Нехай на малюнку 12.4 зображено даний зрізаний конус, у якого $r_1 = A_1O_1 = 5$, $h = OO_1 = 4$ см.

1) Розглянемо трапецію AA_1B_1B – осьовий переріз конуса. Проведемо $A_1K \parallel OO_1$. Тоді A_1O_1OK – прямокутник і $A_1K = OO_1 = 4$ см, $KO = A_1O_1 = 5$ см.

2) AK – проекція похилої AA_1 на площину основи, тому $\angle A_1AO$ – кут нахилу твірної AA_1 до площини основи, тоді $\angle A_1AO = 45^\circ$ (за умовою).

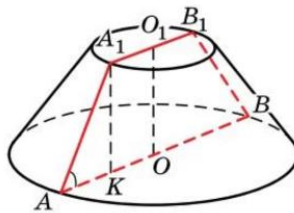
3) У трикутнику AA_1K $\angle K = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, тому $AK = A_1K = 4$ см.

4) Тоді $r = AO = AK + KO = 4 + 5 = 9$ (см).

5) Маємо:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 \cdot (5^2 + 5 \cdot 9 + 9^2) = \frac{604}{3} \pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. $\frac{604}{3} \pi \text{ см}^3$.



Мал. 12.4



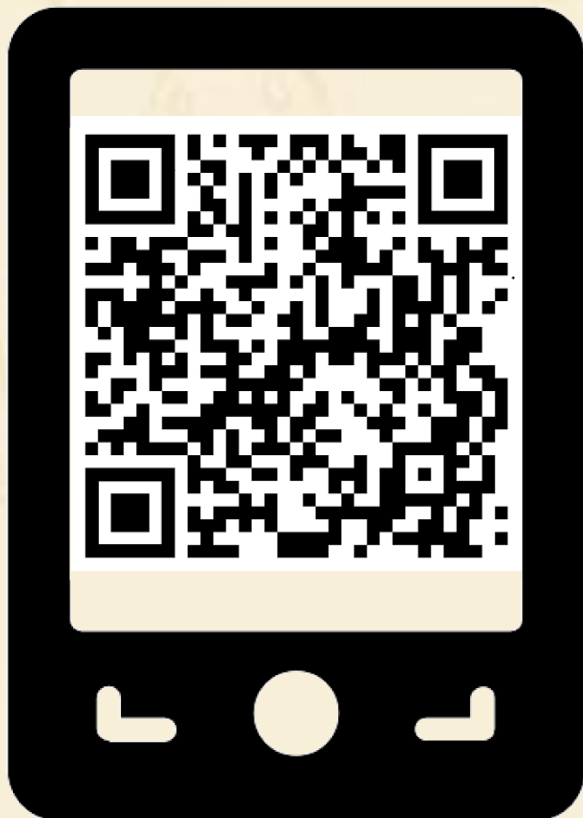
ВІДЕО БЛОК



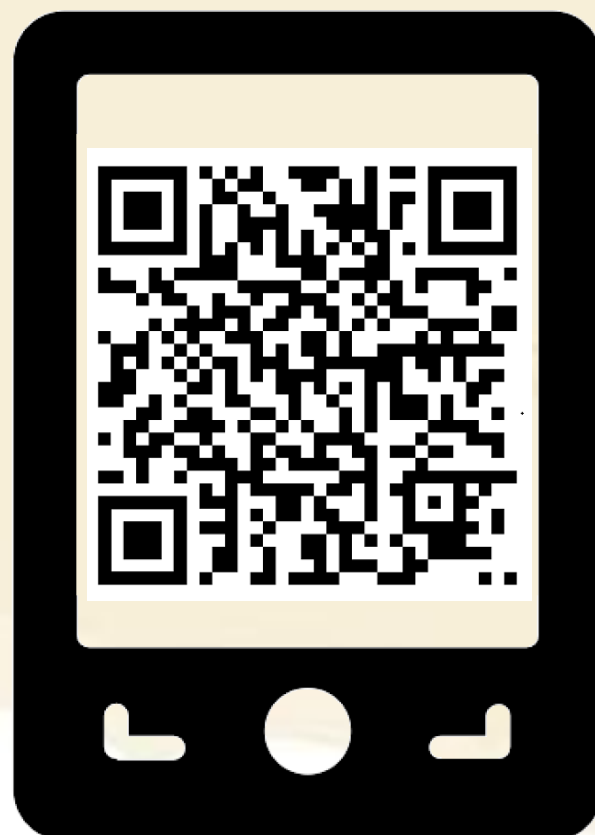
**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



ВІДЕО БЛОК



**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас скористатися
онлайн-тренажерами для
ефективної підготовки до НМТ
з математики — тренуйтеся,
перевіряйте знання та
впевнено йдіть до мети!**



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

1. Прямокутний трикутник із катетами 9 см і 12 см обертається навколо більшого катета (див. рисунок). Визначте площу повної поверхні отриманого тіла обертання.



А	Б	В	Г	Д
$324\pi \text{ см}^2$	$216\pi \text{ см}^2$	$180\pi \text{ см}^2$	$135\pi \text{ см}^2$	$81\pi \text{ см}^2$

2. Довжина кола основи конуса дорівнює 8π см. Знайдіть довжину твірної конуса, якщо його висота дорівнює 3 см.

А	Б	В	Г	Д
11 см	10 см	7 см	5 см	4 см

3. Діаметр основи конуса дорівнює 6 см, а площа його бічної поверхні – $24\pi \text{ см}^2$. Знайдіть довжину твірної конуса.

А	Б	В	Г	Д
2 см	4 см	6 см	8 см	12 см

4. Висота конуса вдвічі менша за діаметр його основи. Знайдіть градусну міру кута між твірною конуса та площиною його основи.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	75°

5. Об'єм циліндра дорівнює 48 см^3 . Знайдіть об'єм конуса, радіус основи якого дорівнює радіусу основи циліндра, а висота вдвічі менша за висоту циліндра.

А	Б	В	Г	Д
6 см^3	8 см^3	16 см^3	24 см^3	36 см^3

6. Знайдіть об'єм конуса, якщо його радіус дорівнює 6 см, твірна – 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$48\pi \text{ см}^3$	$60\pi \text{ см}^3$	$96\pi \text{ см}^3$	$120\pi \text{ см}^3$	$288\pi \text{ см}^3$

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

7. Визначте об'єм конуса, висота якого дорівнює 4 см, а діаметр основи – 6 см.

А	Б	В	Г	Д
$12\pi \text{ см}^3$	$18\pi \text{ см}^3$	$24\pi \text{ см}^3$	$36\pi \text{ см}^3$	$72\pi \text{ см}^3$

8. Цукерка має форму конуса, висота якого дорівнює 3 см, а діаметр основи – 2 см. Маса 1 см^3 шоколаду, з якого виготовлено цукерку, становить 3 г. Визначте масу 100 таких цукерок, якщо кожна цукерка є однорідною і не має всередині порожнин. Укажіть відповідь, найближчу до точної.

А	Б	В	Г	Д
900 г	950 г	1000 г	1050 г	1100 г

9. Радіус основи конуса дорівнює 4, його висота – h , а твірна – l . Укажіть серед наведених правильне співвідношення для h і l .

А	Б	В	Г	Д
$16 + h^2 = l^2$	$4 + h = l$	$16 - h^2 = l^2$	$h^2 - l^2 = 16$	$8 + h^2 = l^2$

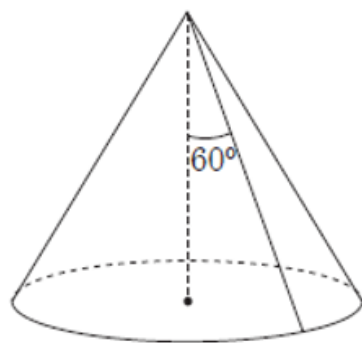
10. Укажіть формулу для обчислення об'єму V конуса, площа основи якого дорівнює S , а висота – h .

А	Б	В	Г	Д
$V = Sh$	$V = \frac{Sh}{2}$	$V = 4Sh$	$V = \frac{4Sh}{3}$	$V = \frac{Sh}{3}$

11. Радіус основи конуса дорівнює r , твірна – l . Твірна утворює з висотою конуса кут 60° (див. рисунок).

Визначте $\frac{r}{l}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{r}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$	$\frac{r}{l} = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{r}{l} = 2$	$\frac{r}{l} = \sqrt{3}$



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

12. Циліндр і конус мають рівні об'єми та рівні радіуси основ. Площа основи циліндра дорівнює $25\pi \text{ см}^2$, а його об'єм – $100\pi \text{ см}^3$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

Закінчення речення

1 Висота циліндра дорівнює

А 4 см

2 Висота конуса дорівнює

Б 5 см

3 Радіус основи циліндра дорівнює

В 8 см

4 Твірна конуса дорівнює

Г 12 см

Д 13 см

13. Установіть відповідність між вимірами конуса (1–3) та правильним щодо нього твердженням (А – Д).

Виміри конуса

Твердження щодо конуса

1 радіус основи дорівнює 6,
висота – $3\sqrt{3}$

А конус утворено обертанням
рівностороннього трикутника зі стороною
6 навколо його висоти

2 радіус основи дорівнює 3,
висота – $3\sqrt{3}$

Б діаметр основи конуса дорівнює 12

3 радіус основи дорівнює 4,
висота – 3

В твірна конуса дорівнює 12

Г площа бічної поверхні конуса дорівнює 20π

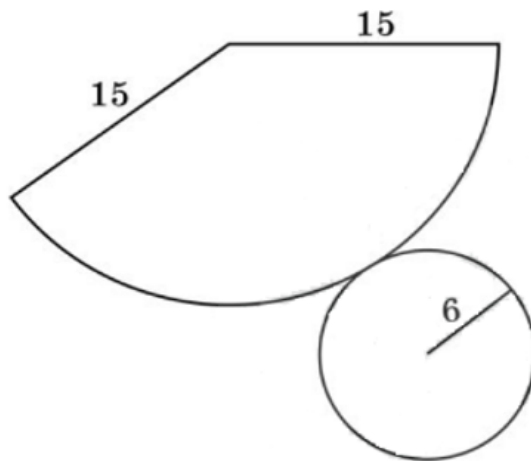
Д об'єм конуса дорівнює $108\sqrt{3}\pi$

- 14 Об'єм тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника навколо висоти, проведеної до його основи, дорівнює $320\pi \text{ см}^3$. Обчисліть довжину бічної сторони цього трикутника (у см), якщо його основа дорівнює 16 см.

- 15 Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якої дорівнює $50\sqrt{3}$, а периметр основи — 50. Визначте об'єм V цього конуса, якщо довжина його твірної дорівнює 4. У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

- 16 На рисунку зображено розгортку конуса. Визначте відношення площі повної поверхні цього конуса до площі його бічної поверхні.



- 17 Довжина кола основи конуса дорівнює 36π , твірна нахилена до площини основи під кутом 30° . Установіть відповідність між відрізком (1–3) і його довжиною (А – Д).

Відрізок

- 1 радіус основи конуса
- 2 висота конуса
- 3 радіус сектора, що є розгорткою бічної поверхні конуса

Довжина відрізка

- А $6\sqrt{3}$
- Б 18
- В $12\sqrt{3}$
- Г 6
- Д 36

Відповіді

- | | | | |
|------|---------|---------|---------|
| 1. Б | 9. А | 13. 1-Б | 17. 1-Б |
| 2. Г | 10. Д | 2-А | 2-А |
| 3. Г | 11. А | 3-Г | 3-В |
| 4. В | 12. 1-А | 14. 17 | |
| 5. Б | 2-Г | 15. 8 | |
| 6. В | 3-Б | 16. 1,4 | |
| 7. А | 4-Д | | |
| 8. Б | | | |