ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

# ДОРОЖНЯ КАРТА З ТЕМИ: «Координати та вектори у просторі»

**Укладач: Пахомова Наталя Василівна**
Слов'янський заклад загальної середньої освіти І-ІІІ ступенів №5 Слов'янської міської ради Донецької області

# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

## КООРДИНАТИ В ПРОСТОРІ

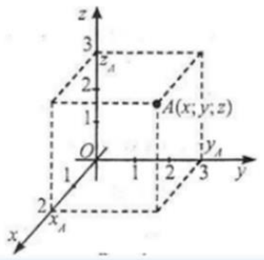
### 1. Визначення декартових координат у просторі

*Декартова система координат у просторі* задається трійкою попарно перпендикулярних осей (вісь $OX$ – *вісь абсцис*, вісь $OY$ – *вісь ординат*, вісь $OZ$ – вісь аплікат), які мають спільний початок $O$ (*початок координат*) і однаковий масштаб уздовж осей.

Кожній точці простори за певним правилом ставиться у відповідність трійка чисел – абсциса, ордината та апліката $(x; y; z)$, які називаються *декартовими координатами точки*. Декартові координати у просторі записують у дужках поруч із буквеним позначенням точки $A(x; y; z)$, причому першою в дужках стоїть абсциса, другою – ордината, третьою – апліката.

Для точок площини $XOY$ апліката $z$ дорівнює нулю, для точок площини $XOZ$ – ордината $y$ дорівнює нулю, для точок площини $YOZ$ – абсциса $x$ дорівнює нулю.

***Наприклад***: точка $A$ має координати 2; 3; 3, що записується так: $A(2; 3; 3)$.

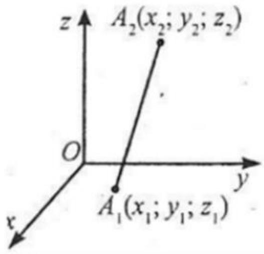



### 2. Відстань між двома точками

*Відстань між двома точками* дорівнює квадратному кореню із суми квадратів різниць однойменних координат.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

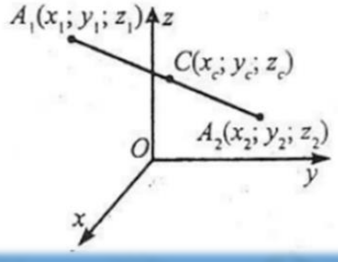
де $d$ – відстань між точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і $A_2(x_2; y_2; z_2)$.




### 3. Координати середини відрізка

*Координати середини відрізка* дорівнюють півсумі відповідних координат його кінців.

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y_c = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



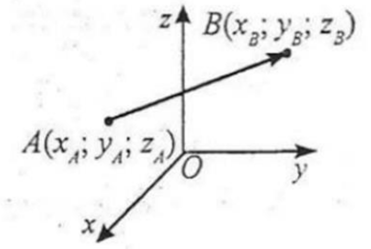
# ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

## ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

**1. Координати вектора**

*Координати вектора* $\overrightarrow{AB}$, що має початок в точці $A(x_A; y_A; z_A)$ і кінець в точці $B(x_B; y_B; z_B)$, дорівнюють різниці відповідних координат точок $B$ і $A$.

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$




**2. Довжина вектора**

*Довжина вектора (абсолютна величина, або модуль)* – довжина відрізка, що зображує вектор. Позначення: $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.

Якщо вектор $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Одиничним називається вектор $\vec{a}$, у якого $|\vec{a}| = 1$.

Нульовим називається вектор $\vec{0}$, у якого початок і кінець збігаються. Нульовий вектор не має визначеного напрямку, а його модуль дорівнює нулю.

**3. Рівність векторів**

Якщо $\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то $\begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3. \end{cases}$

**4. Протилежні вектори**

Якщо $\vec{a}(a_1; a_2; a_3), \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ і $\vec{a} = -\vec{b}$, то $\begin{cases} a_1 = -b_1, \\ a_2 = -b_2, \\ a_3 = -b_3. \end{cases}$

**5. Сума та різниця векторів**

$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) + \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) - \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

**6. Множення вектора на число**

$\lambda \cdot \vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{c}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$

**7. Колінеарність векторів**

Якщо $\vec{a}(a_1; a_2; a_3), \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ – колінеарні, то $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

***Приклад 1***. Задано точки $A(1;2;3), B(0;1;2), C(1;0;0), D(1;0;2)$. Які з цих точок лежать: 1) у площині $XOZ$; 2) на осі $OX$; 3) у площині $YOZ$?

*Розв'язання*

1. Якщо точка лежить у площині $XOZ$, то координата $y$ дорівнює 0: у площині $XOZ$ лежать точки $C(1;0;0), D(1;0;2)$.
2. Якщо точка лежить на осі $OX$, то координата $y$ і $z$ дорівнюють нулю, отже, на осі $OX$ лежить точка $C(1;0;0)$.
3. У площині $YOZ$ лежить точка $B(0;1;2)$.

***Приклад 2***. Задано точки $A(1;2;3), B(2;3;1), C(3;1;2)$. Знайдіть периметр трикутника $ABC$.

*Розв'язання*

$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{6}$,
$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{6}$,
$BC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{6}$,
$P_{ABC} = AB + BC + AC = 3\sqrt{6}$.

*Відповідь*: $3\sqrt{6}$

***Приклад 3***. Знайдіть координати точки $C$ – середини відрізка $AB$, якщо $A(1;2;3), B(-3;2;1)$.

*Розв'язання*

$$x_c = \frac{1-3}{2} = -1;\ y_c = \frac{2+2}{2} = 2;\ z_c = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Отже, $C(-1;2;2)$.

*Відповідь*: $(-1;2;2)$.

# ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

***Задача 1***. Знайдіть координати і довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(2;-3;-1), B(-4;-8;5), C(3;1;-2)$.

*Розв'язання*

$\overrightarrow{AB}\big(-4-2;-8-(-3);5-(-1)\big) => \overrightarrow{AB}(-6;-5;6)$

$\overrightarrow{AC}\big(3-2;1-(-3);-2-(-1)\big) => \overrightarrow{AC}(1;4;-1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2+(-5)^2+6^2} = \sqrt{97}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2+4^2+(-1)^2} = 3\sqrt{2}$

*Відповідь*: $\overrightarrow{AB}(-6;-5;6), \overrightarrow{AC}(1;4;-1), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{97}, |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2}$

***Задача 2***. Знайдіть значення $m$ і $n$, при яких вектори $\vec{a}(3;m;5), \vec{b}(6;-2;n)$ колінеарні.

*Розв'язання*

У колінеарних векторів координати пропорційні, звідси

$$\frac{3}{-6} = \frac{m}{-2} = \frac{5}{n}$$

Маємо два рівняння:

1) $\dfrac{3}{-6} = \dfrac{m}{-2} => m = \dfrac{3\cdot(-2)}{-6} = 1;$

2) $\dfrac{3}{-6} = \dfrac{5}{n} => n = \dfrac{-6\cdot 5}{3} = -10$

*Відповідь*: $1, -10$.

# ВІДЕО БЛОК

**Скористайтесь порадами з відео розбору завдань!**

# ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас скористатися онлайн-тренажерами для ефективної підготовки до НМТ з математики — тренуйтесь, перевіряйте знання та впевнено йдіть до мети!**

# САМОСТІЙНИЙ БЛОК

**№1**

Яка з наведених точок лежить у координатній площині *yz* прямокутної системи координат у просторі?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–2; 5; 0) | (–2; 5; 2) | (2; 0; 0) | (2; 0; –5) | (0; 2; –5) |

**№2**

У прямокутній системі координат у просторі задано точку $A(-2;\ 4;\ -3)$. Укажіть координати точки, що є проекцією точки $A$ на вісь $z$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (0; 4; –3) | (0; 0; –3) | (–2; 4; 0) | (–2; 0; 0) | (0; 4; 0) |

**№3**

Сфера з центром у точці $O(-2;\ -4;\ 3)$ проходить через точку $A(3;\ -1;\ 2)$. Визначте діаметр цієї сфери.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{35}$ | $3\sqrt{3}$ | $2\sqrt{51}$ | $6\sqrt{3}$ | $2\sqrt{35}$ |

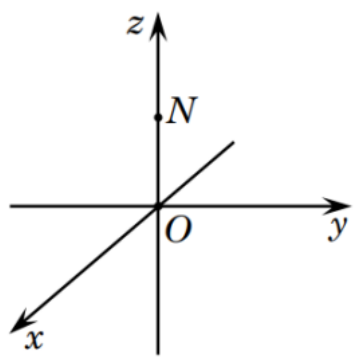
**№4**

У прямокутній системі координат у просторі задано точку $O(0;\ 0;\ 0)$. Укажіть з-поміж наведених точку, відстань від якої до точки $O$ є *найменшою*.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (0; 4; 0) | (0; 3; –4) | (–5; 0; 0) | (1; 3; 0) | (3; 0; –3) |

**№5**

У прямокутній системі координат у просторі точка $N$ лежить на координатній осі $z$ (див. рисунок). Укажіть можливі координати середини відрізка $ON$.

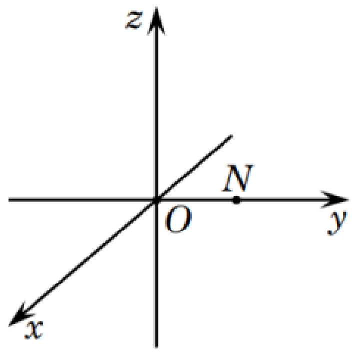



| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (0; 0; 5) | (0; 0; –5) | (5; 0; 0) | (0; 5; 0) | (5; 0; 5) |

# САМОСТІЙНИЙ БЛОК

**№6**

У прямокутній системі координат у просторі точка $N$ лежить на координатній осі $y$ (див. рисунок). Укажіть можливі координати вектора $\overrightarrow{ON}$.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (4; –4; 0) | (0; 4; 0) | (–4; 0; 0) | (4; 0; 0) | (0; 0; 4) |

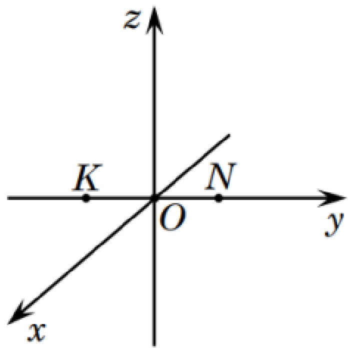
**№7**

Визначте координати вектора $\overrightarrow{KL}$, якщо $K(3; 2; 4)$, $L(-1; 2; 0)$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (4; 0; 4) | (–4; 0; –4) | (–2; 0; –2) | (1; 2; 2) | (2; 4; 4) |

**№8**

У прямокутній системі координат у просторі задано точки $K$ та $N$, що лежать на координатній осі $y$ (див. рисунок). Укажіть можливі координати вектора $\overrightarrow{KN}$.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (0; 0; 4) | (4; 0; 0) | (0; 4; 0) | (4; –4; 0) | (0; –4; 0) |

**№9**

Визначте координати вектора, який є сумою векторів $\vec{a}\,(2; -2; 3)$ і $\vec{b}\,(-7; -3; 4)$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–5; 1; 7) | (–9; –1; 1) | (–5; –5; 7) | (9; 1; –1) | (–5; –1; 7) |

**№10**

Визначте координати вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}\,(3; 5; 7)$ і $\vec{b}\,(2; -4; 8)$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{c}\,(5; 1; 15)$ | $\vec{c}\,(-4; -9; 1)$ | $\vec{c}\,(-1; -9; 1)$ | $\vec{c}\,(1; 1; -1)$ | $\vec{c}\,(1; 9; -1)$ |

# САМОСТІЙНИЙ БЛОК

**№11**

Визначте координати вектора $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, якщо $\vec{a}$ (2; 1; –5) і $\vec{b}$ (–7; 0; 3).

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{c}$ (9; 1; –8) | $\vec{c}$ (–5; 1; –2) | $\vec{c}$ (–9; –1; 8) | $\vec{c}$ (–14; 0; –15) | $\vec{c}$ (–5; –1; 2) |

**№12**

У прямокутній декартовій системі координат у просторі $xyz$ задано точки $A(2; 0; 0)$ і $B(-4; 2; 6)$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

*Початок речення*

1 Серединою відрізка $AB$ є точка

2 Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати

3 Проекцією точки $B$ на площину $xz$ є точка

4 Проекцією точки $B$ на вісь $y$ є точка

*Закінчення речення*

**А** $(-1; 1; 3)$.

**Б** $(0; 2; 0)$.

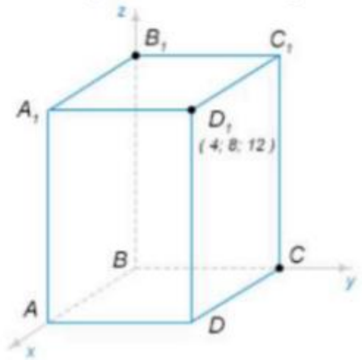
**В** $(-4; 0; 6)$.

**Г** $(-6; 2; 6)$.

**Д** $(-2; 2; 6)$.

**№13**

У прямокутній системі координат у просторі зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребра $AB$, $BC$, $BB_1$ якого лежать на координатних осях (див. рисунок). Вершина $D_1$ має координати (4; 8; 12). До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А –Д) так, щоб утворилося правильне твердження.




*Початок речення*

1 Точка $K$ (0; 0; 12)

2 Точка M (1; 8; 0)

3 Точка P (4; 4; 4)

4 Точка Q (0; 4; 6)

*Закінчення речення*

**А** належить грані $AA_1D_1D$.

**Б** належить ребру $CD$

**В** належить діагоналі $AC_1$

**Г** належить діагоналі $BC_1$

**Д** збігається з точкою $B_1$

# САМОСТІЙНИЙ БЛОК

**№14**

У прямокутній системі координат у просторі задано вектор $\vec{a}(2; -9; 3)$.

1. Визначте координати вектора $\vec{b} = -2\vec{a}$. У відповідь запишіть їхню *суму*.
2. Обчисліть скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

**№15**

У прямокутній системі координат у просторі задано вектор $\overrightarrow{AB}(-3; 8; 1)$ і точку $B(7; -2; 0)$, точка $O$ – початок координат.

1. Визначте ординату $y$ точки $A(x; y; z)$.
2. Обчисліть скалярний добуток $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

**Відповіді до завдань**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **№1** | **Д** | **№6** | **Б** | **№11** | **В** |
| **№2** | **Б** | **№7** | **Б** | **№12** | **1.А 2.Г 3.В 4.Б** |
| **№3** | **Д** | **№8** | **В** | **№13** | **1.Д 2.Б 3.А 4.Г** |
| **№4** | **Г** | **№9** | **В** | **№14** | **1. (-4; 18; -6) 2. -188** |
| **№5** | **А** | **№10** | **Д** | **№15** | **1. (10; -10; -1) 2. -111** |