

ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА



З ТЕМИ:

«КУЛЯ.»

УКЛАДАЧІ :

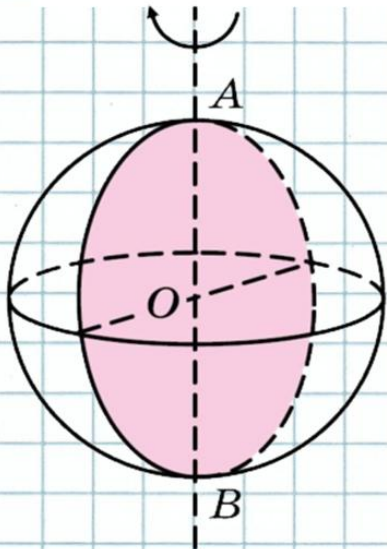
Шаповалова Олена Миколаївна

Верховецька Людмила Веніамінівна

*ОЗЗСО імені Василя Стуса
Краматорської міської ради
Донецької області*

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Куля – геометричне тіло, утворене обертанням круга навколо осі, що містить його діаметр.



Центр кулі т. O

Радіус кулі - OA

Діаметр кулі AB

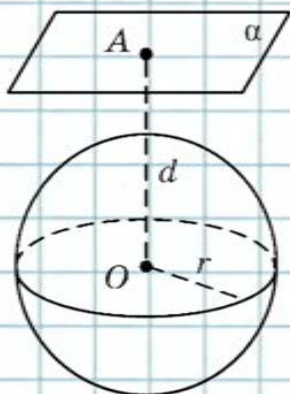
Діаметральна площина – площина, яка проходить через центр кулі
Переріз кулі діаметральною площиною - великий круг, переріз сфери – велике коло

Matemáticas



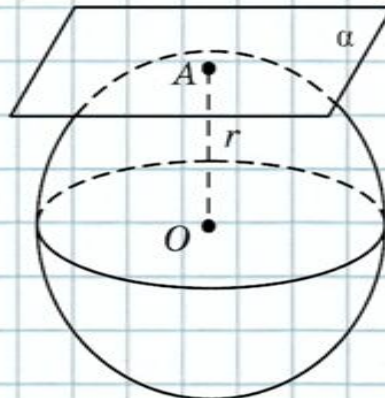
Взаємне розміщення кулі і площини

не мають
спільних точок



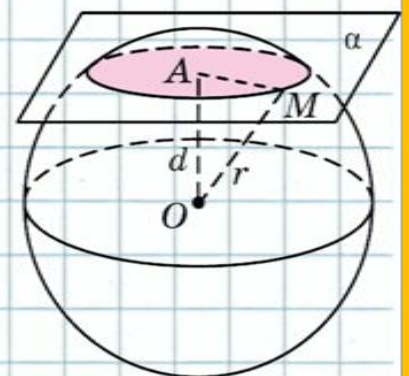
$$OA > r$$

одна
спільна точка



$$OA = r$$

має безліч
спільних точок



$$OA < r$$

Matemáticas



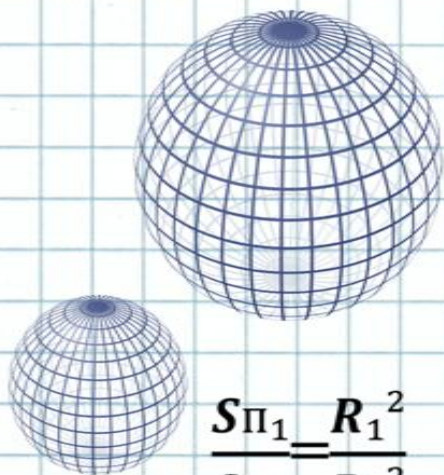
ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Площа великого круга $S = \pi \cdot R^2$

Площа поверхні $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

Помітили?

Площа поверхні в **4 рази**
більше площі великого круга.
Проведи експеримент



$$\frac{S_{\Pi_1}}{S_{\Pi_2}} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$



Matematicas



THEORY

Об'єм кулі



$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$

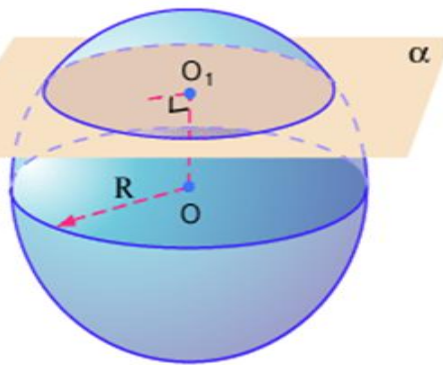
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

Matematicas



ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Перерізи кулі площиною

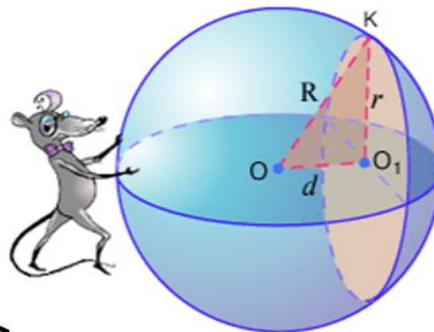


Теорема. Будь-який перетин кулі площиною є коло. Перпендикуляр, опущений з центру кулі на січну площину, потрапляє в центр цього кола.



THEORY

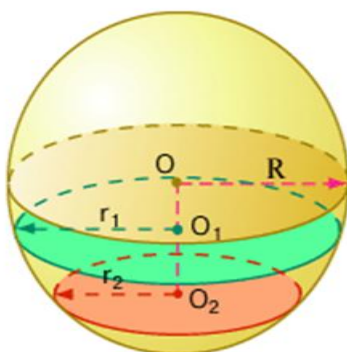
Якщо відомі радіус кулі і відстань від центру кулі до площини перетину, то радіус перетину обчислюється по теоремі Піфагора.



$$O_1K^2 + d^2 = R^2$$



Чим менше відстань від центру кулі до площини, тим більше радіус перетину.



$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$d_1 = OO_1$$

$$d_2 = OO_2$$

$$r_1 > r_2 \rightarrow d_1 < d_2$$



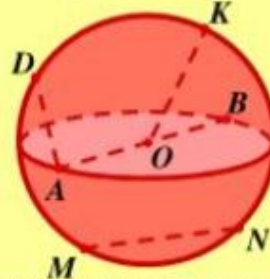
ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

№ 1. Наведіть приклади предметів побуту, що мають форму кулі та сфери.



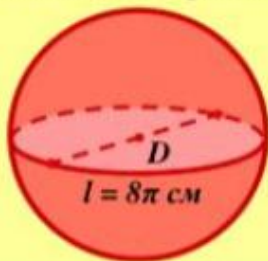
№ 2. За рисунком укажіть радіус кулі.

- а) AD ;
- б) OK ;
- в) AB ;
- г) MN .



№ 3. Визначте діаметр кулі, якщо довжина великого кола дорівнює 8π см.

- а) 4 см;
- б) 2 см;
- в) 8 см;
- г) 16 см.



№ 4. Площа великого круга кулі дорівнює 314 см^2 . Знайдіть радіус кулі.

- а) 5 см;
- б) 10 см;
- в) 2,5 см;
- г) 20 см.



Скільки разів потрібно збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився у 8 разів?

Розв'язання

Нехай радіус даної кулі дорівнює R_1 , а радіус кулі після збільшення - R_2 .

$$\text{Тоді: } V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3, V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

$$\text{Маємо: } V_2 = 8V_1,$$

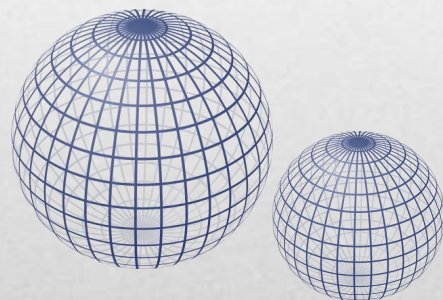
$$\frac{4}{3}\pi R_2^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3,$$

$$R_2^3 = 8R_1^3,$$

$$R_2^3 = (2R_1)^3.$$

Отже, $R_2 = 2R_1$, тобто радіус кулі потрібно збільшити удвічі.

Відповідь: Збільшити удвічі.



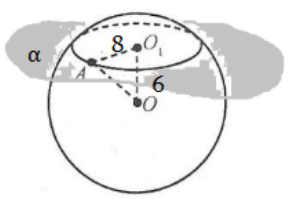
ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



THEORY

Сфера перетинається площиною, відстань від якої до центра сфери дорівнює 6 см. Довжина лінії перетину сфери з площиною дорівнює 16π см. Знайдіть радіус сфери.

Розв'язання



$C = 2\pi r$, за умовою $C = 16\pi$, тому $r = 8$.

Отже, з $\triangle AOO_1$ за теоремою Піфагора:

$$AO^2 = AO_1^2 + O_1O^2,$$

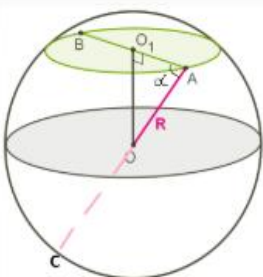
тому $AO = 10$.

Відповідь: 10 см



Через кінець діаметра кулі радіуса R проведено площину, яка утворює із цим діаметром кут α , $\alpha \neq 90^\circ$. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі.

Розв'язання



$S = \pi r^2$, тому з $\triangle AOO_1$ за означенням

$$\cos \alpha = \frac{AO_1}{AO} \Rightarrow$$

$$AO_1 = R \cos \alpha$$

$$\text{Тому } S = \pi R^2 \cos^2 \alpha$$

Відповідь: $\pi R^2 \cos^2 \alpha$

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

№ 3*. Чи є така куля, у якої об'єм і площа поверхні виражаються одним і тим самим числом?

Розв'язання.

Нехай V і $S_{\text{сф.}}$ – об'єм і площа поверхні кулі, радіусом R .

Маємо рівняння:

$$V = S_{\text{сф.}};$$

$$\frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 4\pi \cdot R^2;$$

$$\frac{1}{3}R = 1;$$

$$R = 3.$$

Отже, у кулі радіусом 3, об'єм і площа поверхні однакові.

Відповідь. Така куля є. Радіус кулі 3.



THEORY



№ 4*. Об'єм однієї кулі у 8 разів більший від об'єму другої. У скільки разів площа сфери першої кулі більша від площі сфери другої кулі?

Розв'язання.

Нехай V_1 , R_1 , S_1 та V_2 , R_2 , S_2 – об'єм, радіус та площа поверхні відповідно першої та другої кулі.

$$V_1 = 8 \cdot V_2;$$

$$\frac{4}{3}\pi \cdot R_1^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R_2^3;$$

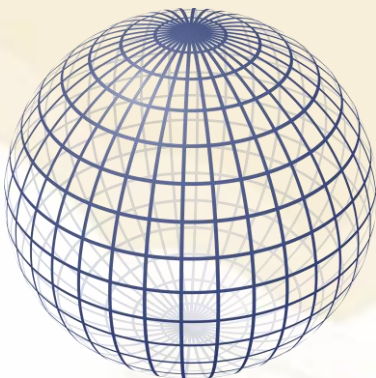
$$R_1^3 = 8R_2^3 \Rightarrow R_1 = 2R_2.$$

$$S_1 = 4\pi \cdot R_1^2 = 4\pi \cdot (2R_2)^2 = 16\pi \cdot R_2^2;$$

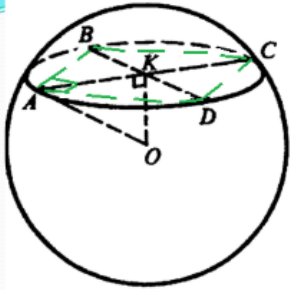
$$S_2 = 4\pi \cdot R_2^2;$$

$$S_1 : S_2 = 16\pi \cdot R_2^2 : (4\pi \cdot R_2^2) = 4.$$

Відповідь. У 4 рази.



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК



Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 26 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 12 см і 16 см.

Розв'язання.

З $\triangle ACD$ за теоремою Піфагора: $AC^2 = AD^2 + DC^2$,
тому $AC = 20$.

$AK = \frac{1}{2} AC$, $AK = 10$

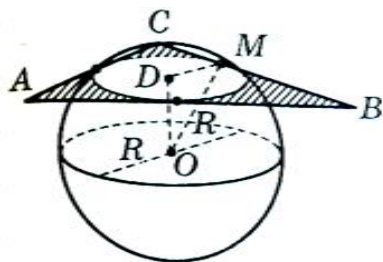
З $\triangle AKO$ за теоремою Піфагора: $AO^2 = AK^2 + KO^2 \Rightarrow$
 $KO^2 = 26^2 - 10^2 = 576$.

Отже, $KO = 24$.

Відповідь: 24 см



Сторони трикутника дорівнюють 15 см, 14 см, 13 см. Знайти відстань від площини трикутника до центра кулі, дотичної до сторін трикутника, якщо радіус кулі дорівнює 5 см.



Дано: $\triangle ABC$;

$AB=15$ см; $BC=14$ см;

$AC=13$ см;

$R=5$ см – радіус кулі.

Знайти: відстань від центра кулі до площини $\triangle ABC$.

Розв'язання.

Площина $\triangle ABC$ перетинає кулю з центром в т. О і радіусом $R=5$ см по колу, вписаному в даний трикутник. Основа перпендикуляра OD , опущеного з центра кулі О на площину $\triangle ABC$, потрапляє в центр цього круга.

Нехай $DM=r$ – радіус круга з центром у точці D, проведений у точку дотику сторони CB до поверхні кулі. Тоді з прямокутного $\triangle ODM$ ($DM \perp CB$, $\angle M=90^\circ$):

$OD = \sqrt{OM^2 - DM^2}$. Радіус круга, вписаного в $\triangle ABC$, знайдемо за формулою $r = \frac{S}{p}$, де

S – площа $\triangle ABC$; p – півпериметр $\triangle ABC$.

$$DM = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}}{21} = 4 \text{ (см)}$$

$$OD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 3 см.



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

THEORY



<https://www.youtube.com/watch?v=f-QBnG710iw>

Скористайтесь
порадами з відео
розбору завдань!



<https://www.youtube.com/watch?v=q0cRQGvnx6Y&t=12s>



<https://youtu.be/aul50D5BHVM?si=HIZECPkV-NB1AWKd>



ВІДЕО БЛОК



THEORY

Куля і сфера



<https://youtu.be/iSJ9wldasac?si=tzoMg7pOEYEEgLEo>

Об'єм кулі



<https://youtu.be/PSVBiJ4thxs?si=Ww3vfMQ4nDJQwTjQ>



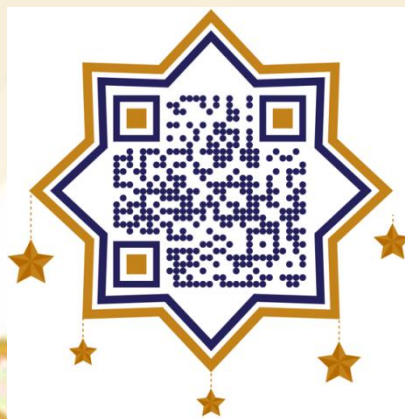
Скористайтесь
порадами з відео
розбору завдань!

Переріз кулі площиною



<https://youtu.be/HAD34YbIH08?si=DtCvG2YITIMAfU72>

Площа сфери



<https://youtu.be/iozhwVRegnc?si=XE6A29K9-2cun-rU>

ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

Куля і сфера. Перерізи кулі і сфери площиною.

<https://vseosvita.ua/test/start/mer047>



ТЕОРЕТИЧНО

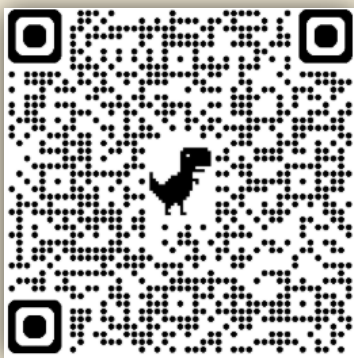
Площа поверхні та об'єм кулі.

<https://vseosvita.ua/test/start/rll044>



Запрошуємо вас скористатися онлайн-тренажерами для ефективної підготовки до НМТ з математики — тренуйтеся, перевіряйте знання та впевнено йдіть до мети!

ТРЕНАЖЕРИ НМТ





САМОСТІЙНИЙ БЛОК

Тема: Куля та сфера

Задача 1.

Дано кулю з радіусом 5 см. Який діаметр цієї кулі?

- А. 2,5 см Б. 10 см В. 25 см Г. 100 см

Задача 2.

У середині кулі проведено переріз, що проходить через центр кулі. Яку фігуру утворено?

- А. Овал Б. Коло В. Круг Г. Диск

Задача 3.

Якщо відстань від центра кулі до деякої точки її поверхні дорівнює R , то як називається ця відстань?

- А. Діаметр Б. Радіус В. Висота Г. Довжина хорди

Тема: Площа поверхні та об'єм кулі

Задача 4.

Знайдіть площу поверхні кулі радіуса 3 см.

- А. $36\pi \text{ см}^2$ Б. $9\pi \text{ см}^2$ В. $12\pi \text{ см}^2$ Г. $108\pi \text{ см}^2$

Задача 5.

Знайдіть об'єм кулі радіуса 22 см.

- А. $323\pi \text{ см}^3$ Б. $163\pi \text{ см}^3$ В. $16\pi \text{ см}^3$ Г. $8\pi \text{ см}^3$

Задача 6.

Як зміниться об'єм кулі, якщо радіус збільшити у 3 рази?

- А. Збільшиться в 3 рази
Б. Збільшиться в 9 разів
В. Збільшиться в 27 разів
Г. Зменшиться в 3 рази

Задача 7.

Площа поверхні кулі становить $100\pi \text{ см}^2$. Знайдіть її радіус.

- А. 5 см Б. 10 см В. 25 см Г. $\sqrt{25}$ см

Задача 8.

Який об'єм кулі, площа поверхні якої дорівнює $36\pi \text{ см}^2$?

- А. $36\pi \text{ см}^3$ Б. $27\pi \text{ см}^3$ В. $18\pi \text{ см}^3$ Г. $12\pi \text{ см}^3$



САМОСТІЙНИЙ БЛОК



THEORY

Тема: Прикладні задачі та задачі з практичним застосуванням

Задача 9.

Бак для зберігання води має форму кулі з діаметром 1 м. Скільки літрів води поміститься в баку?

(1 м³ = 1000 л)

А. 523,6 л

Б. 314,2 л

В. 785,4 л

Г. 1047,2 л

Задача 10.

М'яч має радіус 7 см. Яка площа його поверхні?

А. 196π см²

Б. 49π см²

В. 154π см²

Г. 616π см²

Задача 11.

Резервуар для газу має форму кулі з радіусом 0,5 м. Визначте об'єм резервуара у кубічних метрах.

А. 0,520 м³

Б. 1/6 π м³

В. 1,051 м³

Г. 0,33 м³

Задача 12.

На фабриці виготовляють металеві кулі діаметром 6 см. Який об'єм металу витрачається на виготовлення однієї кулі?

А. 36π см³

Б. 72π см³

В. 113π см³

Г. 904π см³

Правильні відповіді:

1 — Б

2 — В

3 — Б

4 — А

5 — А

6 — В

7 — А

8 — Б

9 — А

10 — Г

11 — Б

12 — В





САМОСТІЙНИЙ БЛОК

THEORY

Задача

На поверхні кулі радіуса r дано дві точки, відстань між якими дорівнює радіусу кулі. Визначити найкоротшу відстань на поверхні кулі між цими точками.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2\pi}{3r}$	$\frac{\pi r}{12}$	$\frac{\pi r}{6}$	$\frac{\pi r}{3}$	$\frac{\pi r}{4}$

Відповідь Г

Задача

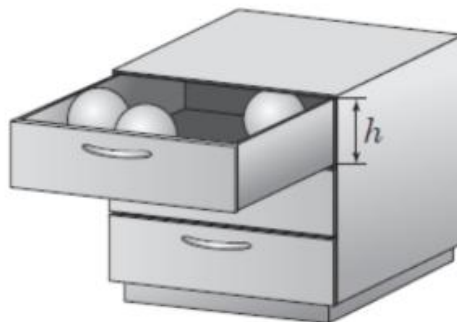
Дві рівні кулі радіуса R розміщені так, що центр однієї з них лежить на поверхні іншої. Знайти радіус кола, по якому перетинаються їхні поверхні.

А	Б	В	Г	Д
R	$\frac{R}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}R$

Відповідь В

Задача

Пластикові кульки радіуса 6 см зберігають у висувній шухлядці, що має форму прямокутного паралелепіпеда (див. рисунок). Якою з наведених може бути висота h цієї шухлядки?



- А 3 см
- Б 6 см
- В 10 см
- Г 13 см

Відповідь Г



ПОРАДНИК



1. Склади план підготовки. Краще планувати так, щоб в один день не готуватися одразу до всіх предметів, які плануєш складати.

2. Чергуй навчання і відпочинок. Інформація краще засвоюється тоді, коли мозок не перебуває у постійному напруженні, йому треба час, щоб опрацювати отриману інформацію та запам'ятати її.

3. Тренуйся. Виконання типових тестових завдань знайомлять з конструкціями зношних завдань і досвід роботи з ними.

4. Повторюй. Не потрібно заучувати напам'ять величезні об'єми інформації, краще періодично повторювати матеріал та закріплювати його на практиці шляхом виконання тестів.

5. Добре харчуйся. Під час інтенсивного інтелектуального навантаження організму необхідна поживна та різноманітна збагачена вітамінами та мікроелементами їжа.

6. Обговорюй із друзями вивчений матеріал та ділись своїми фішками того, як вдалося щось запам'ятати.

7. Головне - не панікуй і не бійся. Досить докласти трохи зусиль - і все обов'язково вийде!

<https://apslogos.com/10-porad-dlya-uspishnoji-pidgotovki-do-zno/>

