

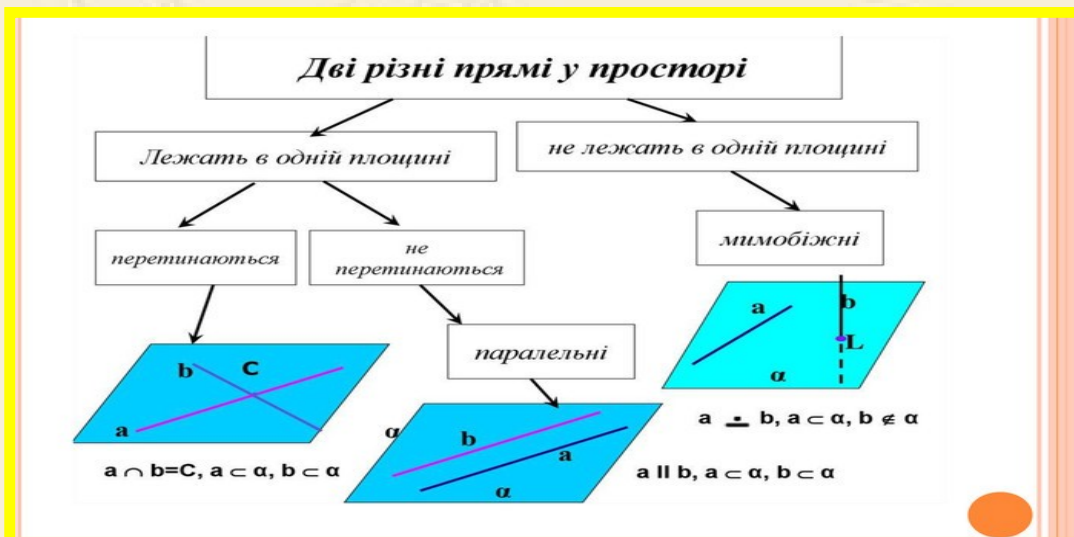


ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА
З ТЕМИ:
«КУТИ У ПРОСТОРИ»

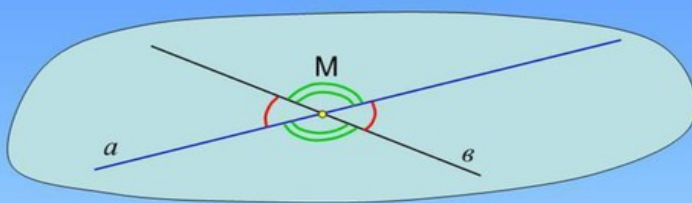
Укладач: Михайлова Ірина Анатоліївна
Волноваський заклад загальної середньої освіти
І – ІІІ ступенів № 6

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК



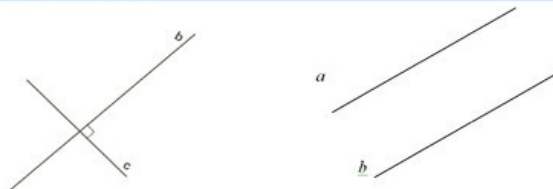
КУТИ МІЖ ПРЯМИМИ

Дві прямі, які перетинаються у просторі визначають одну площину, тому означення кута між прямими, які перетинаються у просторі переноситься і в стереометрію.

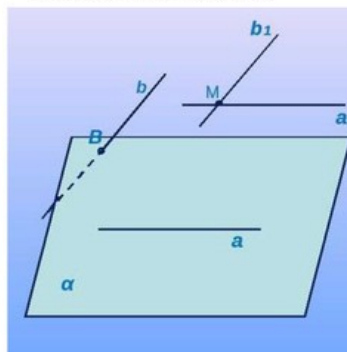


Означення. Менший з кутів, утворених при перетині двох прямих, називають кутом між прямими.

Із означення слідує, що кут між двома перетинаючими прямими не може перевищувати 90° , тобто

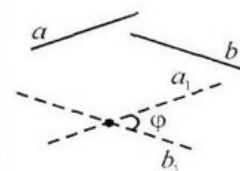


КУТИ МІЖ ПРЯМИМИ



Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим.

Цей кут не залежить від вибору прямих, що перетинаються.



$$a_1 \parallel a; b_1 \parallel b;$$

$$\angle(a;b) = \angle(a_1;b_1) = \varphi$$

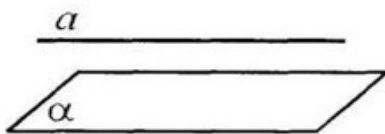
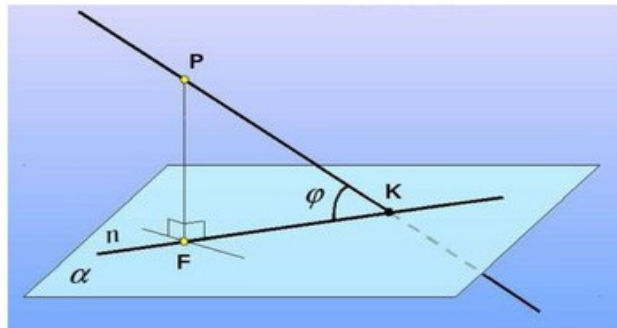
(менший із суміжних кутів);
 $0^\circ < \angle(a;b) \leq 90^\circ$.

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

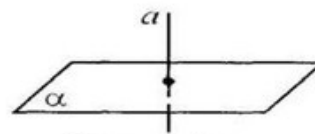
Взаємне розміщення прямої і площини у просторі



Кут між прямою і площиною



Якщо $a \parallel \alpha$ (a лежить в α),
то $\angle(a, \alpha) = 0$.



Якщо $a \perp \alpha$,
то $\angle(a, \alpha) = 90^\circ$.

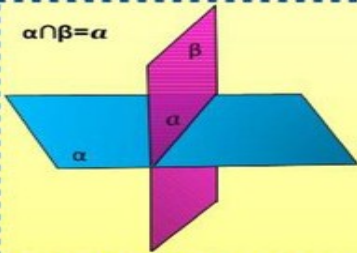
ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Площини у просторі

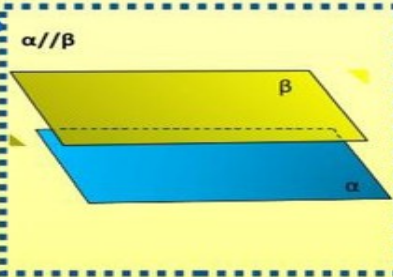
Перетинаються по
прямій

Не мають спільних
точок

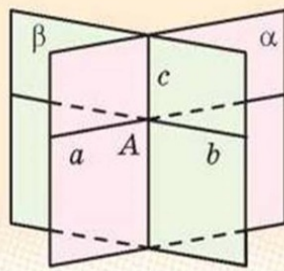
$$\alpha \cap \beta = a$$



$$\alpha // \beta$$



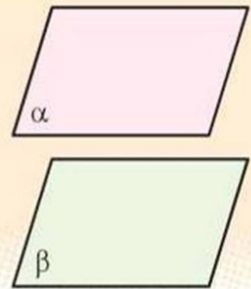
3. Кут між площинами



$$0^\circ \leq \angle(\alpha; \beta) \leq 90^\circ$$

Кут між площинами —
найменший із дво-
гранних кутів, утворе-
них відповідними пів-
площинами.

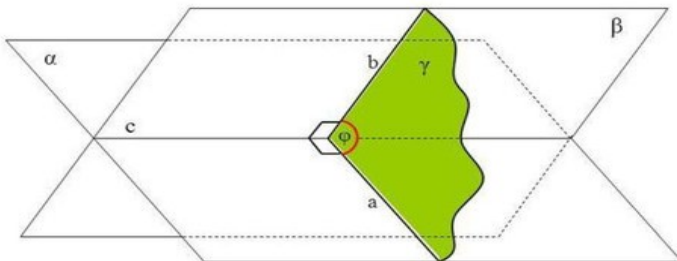
Якщо площини α і β пе-
ретинаються по прямій c
і через точку A на цій
прямій у даних площинах
проведено прямі $a \perp c$,
 $b \perp c$,
то $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$



$$\frac{\alpha // \beta}{\alpha = \beta}$$

$$\Leftrightarrow \angle(\alpha; \beta) = 0^\circ$$

Кут між площинами



Кутом між двома площинами називається плоский кут,
утворений прямими перетину цих площин із площиною,
перпендикулярною до прямої, за якою вони перетинаються.

$$\begin{aligned} \alpha \cap \beta &= c, \quad \gamma \perp c \\ \gamma \cap \alpha &= a, \quad \gamma \cap \beta = b \\ \angle(\alpha, \beta) &= \angle(a, b) = \varphi \end{aligned}$$

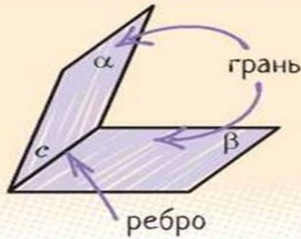
Кут між паралельними площинами дорівнює 0° .

Кут між площинами лежить в межах від 0° до 90° .

Кут між площинами не залежить від вибору січної площини (γ)

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

1. Двогранний кут

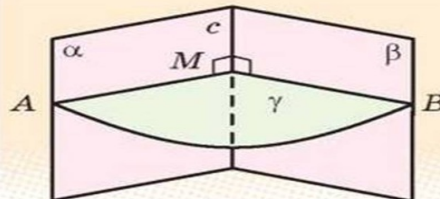


Двогранний кут — фігура, утворена двома півплощинами α і β зі спільною прямою c , що їх обмежує.

Півплощини α і β — *грані* двогранного кута, а пряма c — *ребро* двогранного кута.

Лінійний кут двогранного кута

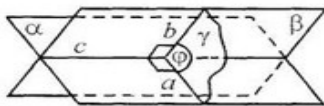
$\angle AMB$ — лінійний кут двогранного кута
($\gamma \perp c$, γ перетинає α по променю MA , γ перетинає β по променю MB)



Якщо φ — лінійний кут, то
 $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

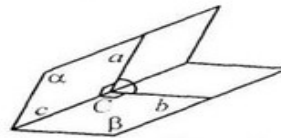
СПОСОБИ ПОБУДОВИ

За означенням



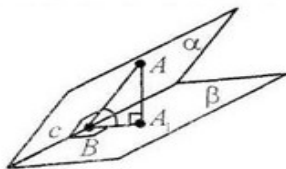
$\alpha \times \beta = c$; $\gamma \perp c$; $\gamma \times \alpha = a$;
 $\gamma \times \beta = b$; $\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b)$.

Через точку на прямій перетину



$\alpha \times \beta = c$; $\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b)$;
 $C \in c$; $a \perp c$; $b \perp c$; $a \subset \alpha$;
 $b \subset \beta$.

Двома перпендикулярами



$AB \perp c$;
 $AA_1 \perp \beta$;
 $\angle ABA_1$ — кут між площинами α і β

$\perp BC$.
ою про три
— лінійний
брі BC .

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Задача №1: У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 8.3) знайдіть кут між прямими $A_1 C_1$ і $B_1 C$.

Розв'язання

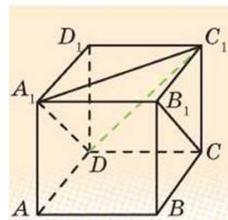


Рис. 8.3

Коментар

Прямі $A_1 C_1$ і $B_1 C$ — мимобіжні. Щоб знайти кут між ними, можна провести через довільну точку простору паралельні їм прямі або (що роблять частіше) через точку однієї прямої — пряму, паралельну другій прямій.

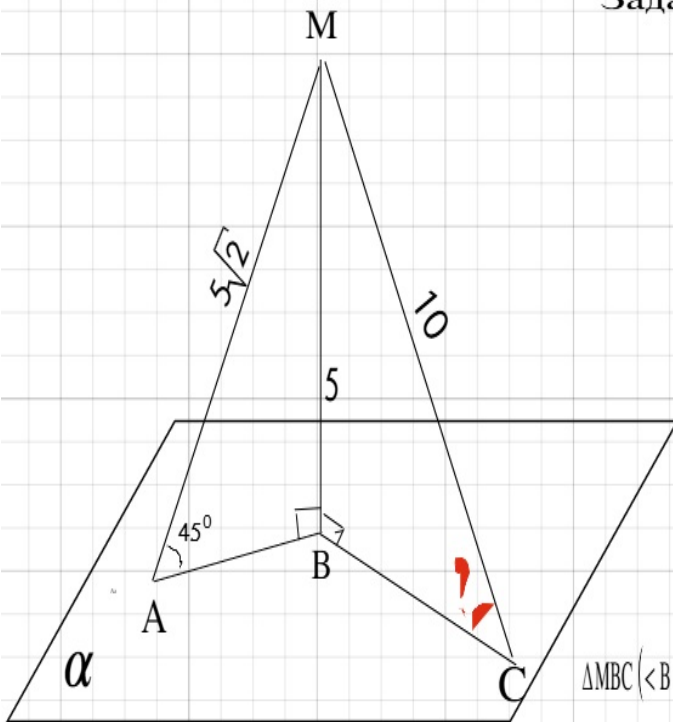
Розглянемо площину, яка проходить через паралельні ребра куба $A_1 B_1$ і DC — вона перетинає паралельні грані куба $AA_1 D_1 D$ і $BB_1 C_1 C$ по паралельних прямих $A_1 D$ і $B_1 C$. Отже, $A_1 D \parallel B_1 C$, але тоді кут між мимобіжними прямими $A_1 C_1$ і $B_1 C$ дорівнює куту між прямими $A_1 C_1$ і $A_1 D$. Сполучаючи точки D і C_1 відрізком, отримуємо рівносторонній трикутник $A_1 C_1 D$ (його сторони дорівнюють одна одній як діагоналі рівних квадратів). Звідси $\angle C_1 A_1 D = 60^\circ$.



THEORY

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Задача № 2



Дано : $BM \perp \alpha$

MA – похила

MC – похила

MA = $5\sqrt{2}$ см

MC = 10 см

$\angle MAB = 45^\circ$

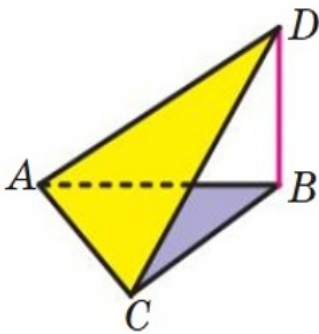
Знайти : $\angle MCB$

Розв'язання :

$$\triangle MBA (\angle B = 90^\circ), \frac{MB}{MA} = \sin \angle A, MB = MA \cdot \sin \angle A, MB = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \text{ см}$$

$$\triangle MBC (\angle B = 90^\circ), \sin \angle MCB = \frac{MB}{MC}, \sin \angle MCB = \frac{5}{10} = 0.5, \angle MCB = 30^\circ$$

Задача № 3: Трикутники ABC і ADC лежать у різних площинах, причому пряма BD перпендикулярна до площини ABC. Знайдіть градусну міру двогранного кута, грані якого містять дані трикутники, якщо $\angle ACD = 90^\circ$, $BC = 6$ см, $CD = 12$ см



Дано: $(ABC) \cap (ADC) = AC$, $DB \perp (ABC)$,
 $\angle ACD = 90^\circ$, $BC = 6$ см, $CD = 12$ см

Знайти: градусну міру двогранного кута

Розв'язання:

$\triangle DBC$ – прямокутний за умовою ($DB \perp (ABC)$), $(ABC) \perp (ADC) = AC$. За теоремою про три перпендикуляри, якщо $DC \perp AC$, то і $BC \perp AC$. Отже $\angle DCB$ – лінійний кут двогранного кута.

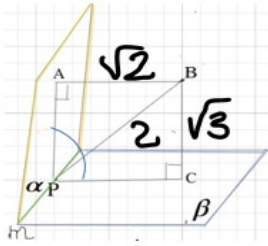
$$\cos \angle DCB = \frac{BC}{DC} \cos \angle DCB = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \angle DCB = 60^\circ$$



THEORY

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

Задача № 4. Точка В лежить у середині двогранного кута та віддалена від його граней на $\sqrt{2}$ см та $\sqrt{3}$ см, а від ребра – на 2 см. Знайдіть градусну міру даного двогранного кута.



Дано: $\alpha \cap \beta = m$, $\rho(B, \alpha) = \sqrt{2}$ см, $\rho(B, \beta) = \sqrt{3}$ см, $BP = 2$ см.
Знайти: градусну міру даного двогранного кута.

Розв'язання: $BP \perp m$, $AB \perp AP$, за теоремою про три перпендикуляри випливає, що $AP \perp m$. Аналогічно, $BP \perp m$, $BC \perp CP$, за теоремою про три перпендикуляри випливає, що $CP \perp m$. $\angle APC$ – шуканий лінійний кут двогранного кута.

$\triangle BAP$ – прямокутний, $\sin \angle APB = \frac{AB}{PB}$,

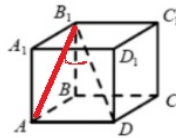
$$\sin \angle APB = \frac{\sqrt{2}}{2}, \angle APB = 45^\circ,$$

$\triangle BCP$ – прямокутний, $\sin \angle BCP = \frac{BC}{BP}$, $\sin \angle BCP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle BCP = 60^\circ$.

$$\angle APC = \angle APB + \angle BPC = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ.$$

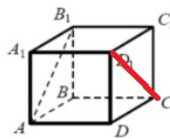
Відповідь: 105° .

1. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть кут, що утворює пряма $B_1 D$ з площиною ABB_1 .



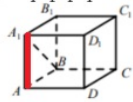
- А) $\angle A_1 B_1 D$; Б) $\angle BB_1 D$; В) $\angle AB_1 D$; Г) $\angle ADB_1$.

2. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть пряму, яка перпендикулярна до прямої AB_1 .



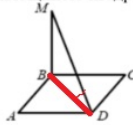
- А) CD ; Б) CC_1 ; В) AC ; Г) CD_1 .

3. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдіть кут між прямими $A_1 B$ і DD_1 .



- А) 30° ; Б) 45° ; В) 60° ; Г) 90° .

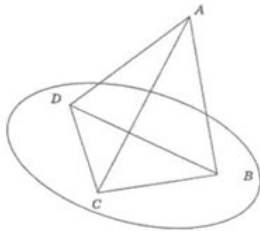
4. Пряма MB перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$, зображеного на рисунку. Укажіть кут між прямою MD і площиною квадрата.



- А) $\angle MDA$; Б) $\angle MDB$; В) $\angle MDC$; Г) $\angle MBD$.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

1. На малюнку 425 точка A не належить площині трикутника BCD, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle DBC = 90^\circ$. Знайти пряму і площину, перпендикулярні між собою.



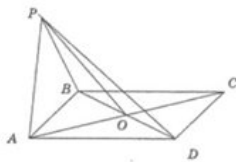
мал. 425

А	Б	В	Г	Д
$BC \perp ACD$	$BC \perp ABD$	$CD \perp ABD$	$BD \perp ABC$	$AB \perp BCD$

2. З точки до площини проведено похилу, довжина якої дорівнює 4 см. Знайти проекцію похилої, якщо похила утворює із перпендикуляром кут 45° .

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{2}$ см	2 см	$4\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{3}$ см

3. AP - перпендикуляр до площини квадрата ABCD (мал. 426). Які з прямих PB, PO і PDO перпендикулярні до прямої BD)?



мал. 426

А	Б	В	Г	Д
Жодна	Тільки PO	Тільки PB і PD	Тільки PB і PO	Всі три

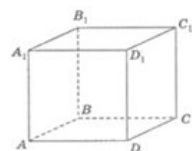
4. В трикутнику ABC $\angle BAC = 32^\circ$, $\angle ACB = 58^\circ$. Пряма AD перпендикулярна до площини трикутника ABC. Визначте вид трикутника BCD.

А	Б	В	Г	Д
Гострокутний	Прямокутний	Тупокутний	Прямокутний рівнобедрений	Гострокутний рівнобедрений

5. Двогранний кут дорівнює 30° . На одній із граней кута дано точку, яка знаходиться на відстані 8 см від ребра двогранного кута. Знайти відстань від цієї точки до другої грані двогранного кута.

А	Б	В	Г	Д
8 см	6 см	4 см	$4\sqrt{3}$ см	$4\sqrt{2}$ см

6. ABCDA₁B₁C₁D₁ - куб (мал. 427). Знайти міру двогранного кута, який утворюють площини ABC₁ і ABC.



мал. 427

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	Неможливо визначити

ВІДЕО БЛОК

**Скористайтесь
порадами з
відео розбору
завдань!**



1. <https://www.youtube.com/watch?v=Gta4sBzLF70>

Відео урок від

ВШО



2. <https://www.youtube.com/watch?v=xf51gek5iBw>

- Теорія і практика від Наталі Бузикіної



3. https://www.youtube.com/watch?v=WF_USCL1kzM

- вчимося розв'язувати задачі



ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас
скористатися онлайн-
тренажерами для
ефективної підготовки до
НМТ з математики —
тренуйтеся, перевіряйте
знання та впевнено йдіть до
мети!**



1. <https://justclass.com.ua/hw/525f60de> - тестові завдання
2. <https://justclass.com.ua/hw/70bf1877>
3. <https://justclass.com.ua/hw/29b9f934>
4. <https://learning.ua/zno/kursy-zno/kursy-zno-z-matematyky/kut-mizh-priamymy-ta-ploshchynamy-v-prostori> - кути між прямими та площинами у просторі
5. <https://learningapps.org/1409734> - перпендикулярність прямих і площин
6. Тестові завдання ЗНО: Пряма і площина у просторі



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

1. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть кути, які утворюють прямі:

- 1) AA_1 і $B_1 C_1$;
- 2) AA_1 і CC_1 ;
- 3) BB_1 і CD .

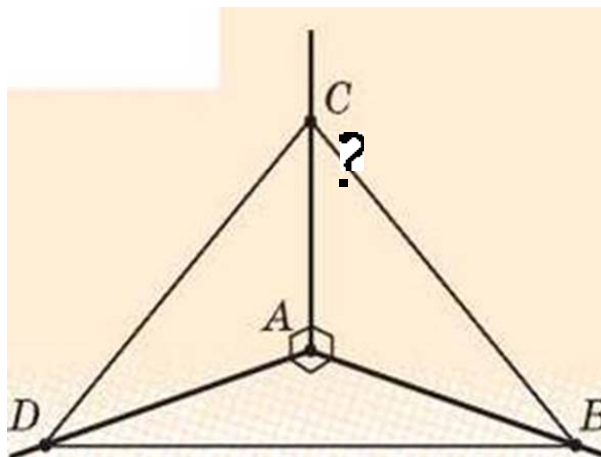
2. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть кути між мимобіжними прямими:

- 1) AB і $B_1 B_1$;
- 2) AB_1 і BC_1 .

3. Точки A, B, C лежать на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC . Знайдіть кути трикутника ABC , якщо відомо, що $OA = OB = OC$.

4. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні (рис. 8.4). Знайдіть довжину відрізка CD , якщо:

- 1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1,5$ см;
- 2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AB = 5$ см



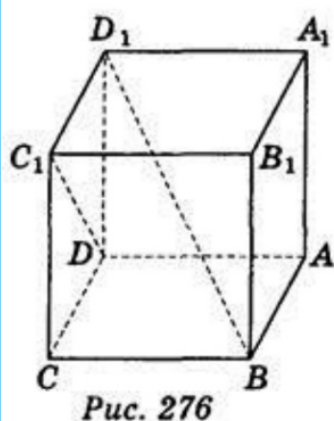


Рис. 276

Знайти кут між C_1D і BA_1

Знайти кут між D_1B і B_1A_1

Знайти кути трикутника ACD_1 і $B_1C_1A_1$;

Відповіді до задач.

I. 1. 90°
2. 0°
3. 90°

II. 1. 45°
2. 90°

III. $\triangle ABC$ – рівносторонній

IV. 1. $CD = 6,5$ см
2. $CD = \sqrt{231}$

V. $\angle COD = 90^\circ$, $\angle D_1BA$



THEORY

ПОРАДНИК

Поради при розв'язуванні геометричних задач у просторі.

1. Починайте з легкого! Відповідайте на ті питання, у правильності яких Ви не сумніваєтеся, не зупиняючись на тих, які можуть викликати довгі роздуми. Тоді Ви заспокоєтесь, голова почне працювати ясніше і чіткіше, і Ви увійдете в робочий ритм. Ви немовбито звільнитесь від нервозності, і вся Ваша енергія потім буде спрямована на важкі питання.
2. Жорсткі рамки часу не повинні впливати на якість Ваших відповідей. Перед тим, як вписати відповідь, перечитайте питання двічі і переконайтеся, що Ви правильно зрозуміли, що від Вас вимагається
3. Обов'язково робити рисунок до задачі – це вже 30% розв'язку задачі.
4. Робіть позначки на рисунку – довжини, кути, площини, невідому величину.
5. Чітко визначайте, що потрібно знайти.
6. Уважно, декілька разів прочитайте умову задачі. Читайте завдання до кінця! Поспіх не повинен призводити до того, що Ви прагнете зрозуміти умови завдання "за першими словами" і побудовуєте кінцівку у власній уяві. Це вірний спосіб зробити прикрі помилки в найлегших питаннях
7. Визначте прямі кути в задачі.
8. Застосовуйте теорему про три перпендикуляри.
9. Використовуйте алгоритм побудови двогранного кута
10. Правильно виконаний рисунок до задачі – успіх до розв'язування задачі.
11. Думайте тільки про те, що кожне нове завдання - це шанс набрати бали. • Виключайте! Більшість завдань можна розв'язати швидше, якщо не шукати одразу правильний варіант відповіді, а послідовно виключати ті, які дійсно не підходять. Метод виключення дозволяє у результаті сконцентрувати увагу всього на одному-двох варіантах, а не на всіх п'яти-семи (що набагато важче
12. Залиште час для перевірки своєї роботи, щоб встигнути пробігти очима і відмітити очевидні помилки. • Довіряйте інтуїції! Якщо Ви не впевнені у виборі відповіді, але інтуїтивно можете віддати перевагу якійсь відповіді іншим, то інтуїції слід довіряти! При цьому вибирайте такий варіант, який, на Ваш погляд, має велику вірогідність.

