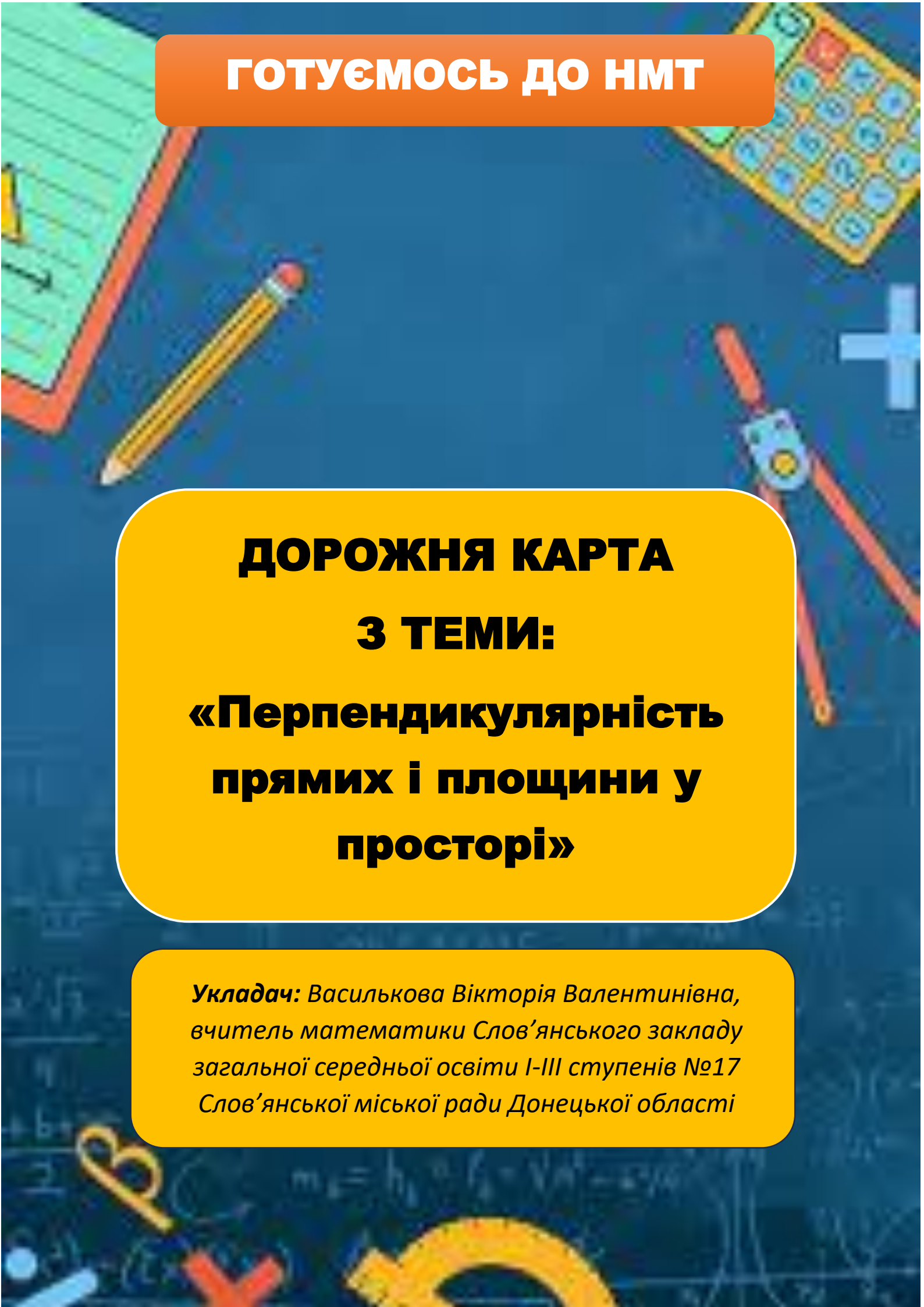




ГОТУЄМОСЬ ДО НМТ

ДОРОЖНЯ КАРТА
З ТЕМИ:
«Перпендикулярність
прямих і площини у
просторі»

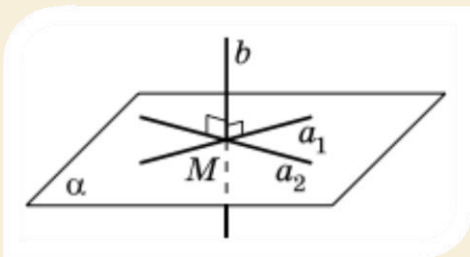
*Укладач: Василькова Вікторія Валентинівна,
вчитель математики Слов'янського закладу
загальної середньої освіти I-III ступенів №17
Слов'янської міської ради Донецької області*

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

1. Перпендикулярність прямих у просторі

Дві прямі, які перетинаються під прямим кутом, називаються **перпендикулярними (взаємно перпендикулярними)**.

2. Перпендикулярність прямої і площини

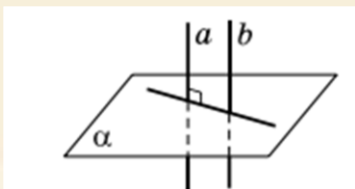


Пряму, яка перетинає площину, називають **перпендикулярною до цієї площини**, якщо вона перпендикулярна до кожної прямої, що лежить у площині і проходить через точку перетину..

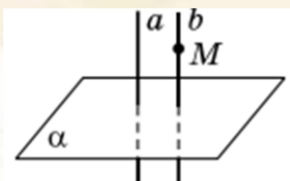
Ознака перпендикулярності прямої і площини: Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.

Наслідок: Пряма, що перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перпендикулярна до площини, яка проходить через ці прямі.

Властивості взаємно перпендикулярних прямих і площин:



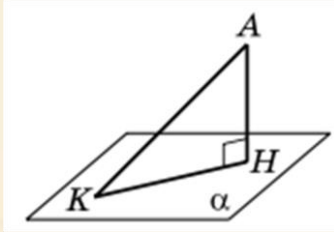
1. Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.



2. Дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, паралельні між собою

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

3. Перпендикуляр і похила.



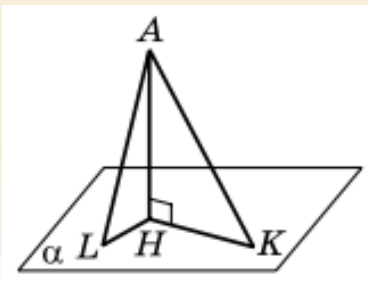
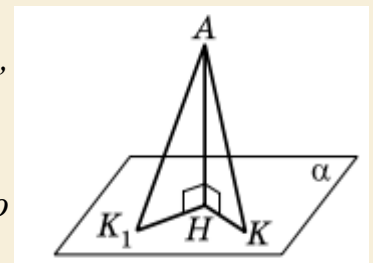
Перпендикуляром, проведеним із даної точки до даної площини, називають відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини (на малюнку AH).

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називають будь-який відрізок, який сполучає цю точку з точкою площини і не є перпендикуляром (на малюнку AK).

Відрізок, що сполучає основу перпендикуляра і похилої, називають **проєкцією похилої** AK на площину α (на малюнку KH).

Властивості перпендикуляра, похилих і їх проєкцій:

3. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до площини, менша за довжину будь-якої похилої, проведеної із цієї самої точки до площини.
4. Якщо дві похили, проведені з точки до площини рівні, то рівні і їх проєкції.
(на малюнку $AK_1 = AK$, то $KH_1 = KH$)
5. Якщо проєкції двох похилих, проведених з точки до площини, рівні, то рівні й похили.
(на малюнку $KH_1 = KH$, то $AK_1 = AK$)



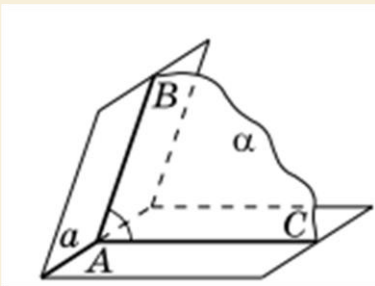
1. Якщо з точки до площини проведено дві похили, то більшою з них є та, що має більшу проєкцію на цю площину.
(на малюнку KH)
2. Якщо з точки до площини проведено дві похили, то більша похила має більшу проєкцію на цю площину.

ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

Теорема про три перпендикуляри

Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проєкції, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проєкції похилої.

4. Двогранний кут

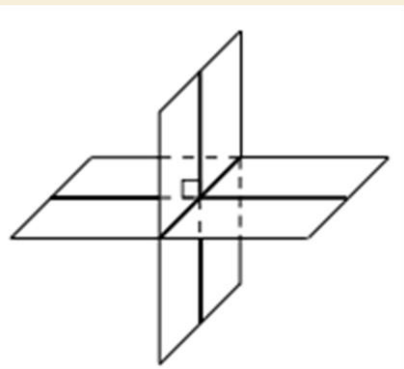


Двогранним кутом називають фігуру, яка утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.

Півплощини, що утворюють двогранний кут називають **гранями**, а пряму, що їх обмежує, – **ребром** двогранного кута.

Градусною мірою двогранного кута називають **градусну міру його лінійного кута**.

5. Перпендикулярність площин



Дві площини називаються **перпендикулярними (взаємно перпендикулярними)**, якщо, перетинаючись, вони утворюють прямі двогранні кути.

Теорема ознака перпендикулярності площин.

Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини, то ці площини взаємно перпендикулярні.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

№1

У просторі задано пряму a і точку M , яка не належить цій прямій. Скільки існує прямих, що перетинають пряму a , можна провести перпендикулярно до неї через точку M ?

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>
Жодної	Одну	Дві	Три	Безліч

Відповідь: одну.

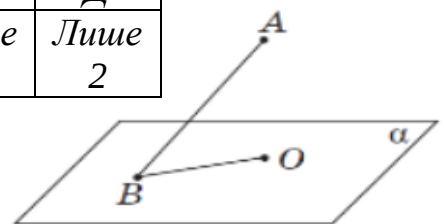
№2

Відрізок OB є проєкцією похилої AB на площину α . Які з наведених тверджень є правильними?

- 1) відрізки AB і OB перпендикулярні
- 2) відрізки AB і OA перпендикулярні
- 3) відрізки AO і OB перпендикулярні

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>
Лише 1	Лише 2 і 3	Лише 1 і 2	Лише 3	Лише 2

Відповідь: 3.



ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

№3

Точка A належить площині α . Які з наведених тверджень є правильними?

- 1) Через точку A можна провести пряму, перпендикулярну до площини α
- 2) Через точку A можна провести площину, перпендикулярну до площини α
- 3) Через точку A можна провести площину, паралельну площині α .

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>
Лише 1	Лише 1 і 3	Лише 1 і 2	Лише 3	Лише 2

Відповідь: лише 1 та 2.

№4

Пряма b не має спільних точок з площиною α . Які з наведених тверджень є правильними?

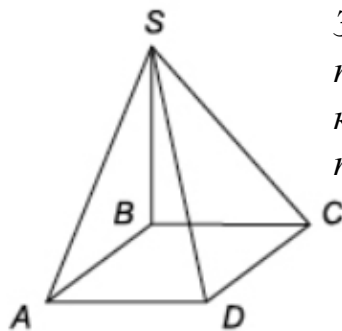
- 1) Через пряму b можна провести лише одну площину, перпендикулярну до площини α .
- 2) Через пряму b можна провести лише одну площину, перпендикулярну площині α .
- 3) У площині α можна провести лише одну пряму, паралельну прямій b .

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>
Лише 1	Лише 1 і 3	Лише 1 і 2	Лише 3	Лише 2

Відповідь: лише 1 та 2.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

№5



З вершини B квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр SB до площини цього квадрата. Які з наведених тверджень є правильними?

- 1) $\angle SBA = 90^\circ$
- 2) $\angle SAD = \angle SDA$.
- 3) $\angle SAD = 90^\circ$

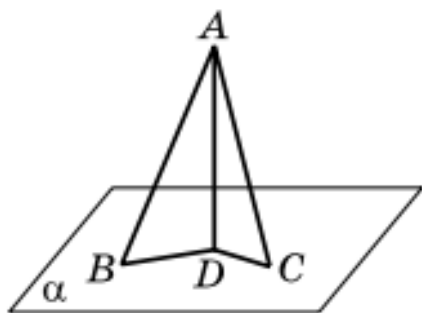
А	Б	В	Г	Д
Лише 1	Лише 1 і 3	Лише 1 і 2	Лише 3	Лише 2

Відповідь: лише 1 та 3.

№6

З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD . Знайдіть відстань від точки A до площини α та довжину похилої AC , якщо $AB=26$ см, $BD=24$ см, $DC=2\sqrt{11}$ см.

Розв'язання



Оскільки AD – перпендикуляр до площини α , то $\triangle ADB$ і $\triangle ADC$ – прямокутні трикутники.

Із $\triangle ADB$ за теоремою Піфагора знайдемо AD :

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$AD = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{100} = 10 \text{ см}$$

Із $\triangle ADC$ за теоремою Піфагора знайдемо AC :

$$AC = \sqrt{10^2 + (2\sqrt{11})^2} = \sqrt{100 + 44} = \sqrt{144} = 12 \text{ см}$$

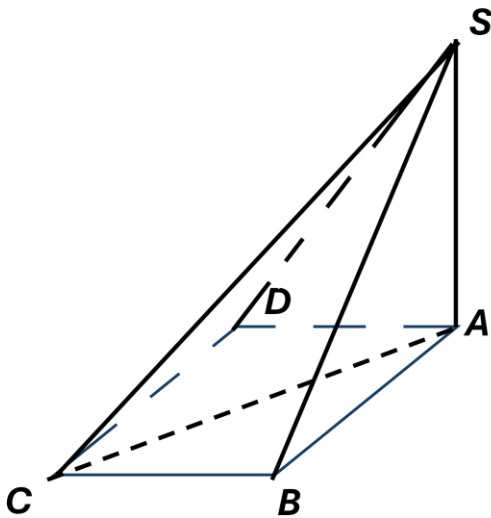
Відповідь: 10 см, 12 см

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

№7

Пряма AS перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть AB , якщо $SC=10$ см, $SA=6$ см.

Розв'язання



1) Трикутник SAC є прямокутником, бо пряма SA перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$.

2) З прямокутного трикутника SAC за теоремою Піфагора знайдемо AC :

$$AC^2 = SC^2 - SA^2$$
$$AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ см}$$

3) Діагональ квадрата $ABCD$ є бісектрисою його кутів, тому кут CAB дорівнює 45° .

$$\text{Звідси, } AB = \frac{AC}{\sqrt{2}}$$

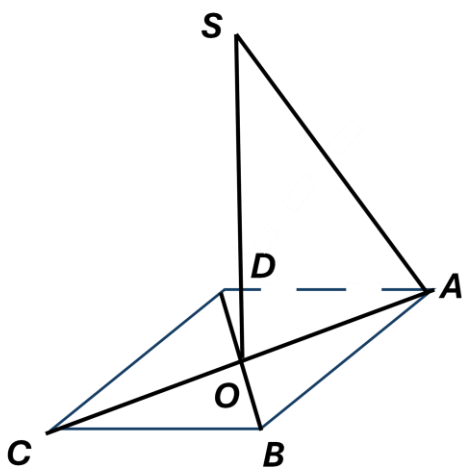
$$AB = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ см}$$

Відповідь: $4\sqrt{2}$ см

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

№8

Пряма SO перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$, точка O – точка перетину діагоналей квадрата. Знайдіть SA , якщо $AB=4$ см, $SO = 2$ см.



Розв'язання

Оскільки AO є половиною діагоналі AC квадрата $ABCD$, то знайдемо діагональ AC :

$$AC = AB\sqrt{2}, \text{ маємо } AC = 4\sqrt{2} \text{ см,}$$

$$OA = 4\sqrt{2} : 2 = 2\sqrt{2} \text{ см}$$

Трикутник SOA є прямокутним, бо SO - перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ за умовою задачі.

Із $\triangle SOA$ за теоремою Піфагора:

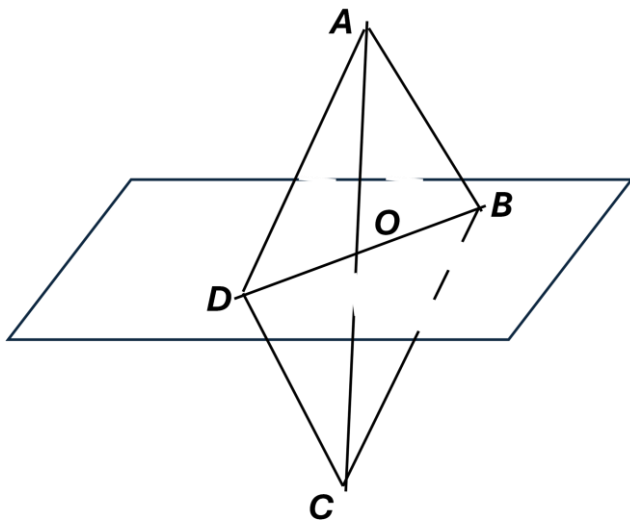
$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$
$$SA = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ см}$$

Відповідь: $2\sqrt{3}$ см

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

№9

Діагональ AC паралелограма $ABCD$ перпендикулярна до площини α , а вершини B і D належать цій площині. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AB=15$ см.



Розв'язання

Оскільки діагональ AC перпендикулярна до площини α , то пряма AC перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини, зокрема до діагоналі BD . Діагоналі AC та BD лежать в одній площині та перпендикулярні, тому паралелограм $ABCD$ є ромбом.

Отже, $AD=AB=BC=AC$, як сторони ромба $ABCD$.

Периметр ромба можна обчислити за формулою:

$$P=4a$$

$$P=4 \cdot 15 = 60 \text{ см}$$

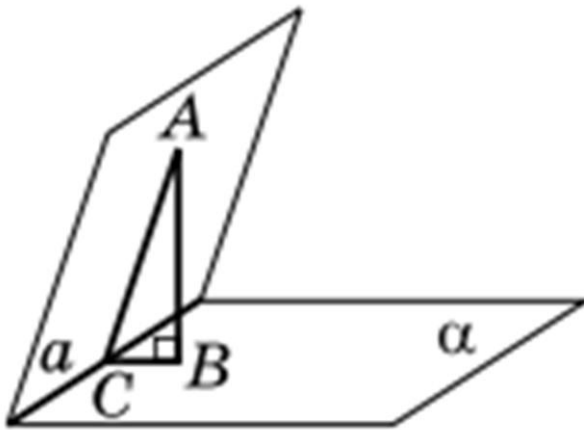
Відповідь: 60 см

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

№10

Двогранний кут дорівнює 45° . На одній із граней двогранного кута дано точку, яка знаходиться на відстані 4 см від його ребра. Знайдіть відстань від цієї точки до другої грані.

Розв'язання



Нехай точка A належить одній із граней двогранного кута з ребром a , AC перпендикулярно ребру a , $AC = 4$ см

Позначимо другу грань кута через α і проведемо до неї перпендикуляр AB . З'єднаємо точки B і C .

$AB \perp \alpha$, AC – похила, BC – проєкція похилої.

Тоді $BC \perp \alpha$ за теоремою про три перпендикуляри.

$AC \perp \alpha$, $BC \perp \alpha$, тому $a \perp (ABC)$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини. Отже, кут ACB – лінійний кут двогранного кута і дорівнює 45° за умовою задачі.

$$\text{Із } \triangle ABC \text{ маємо: } AB = \frac{AC}{\sin 45} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ см}$$

Відповідь: $2\sqrt{2}$ см

ТРЕНУВАЛЬНИЙ БЛОК

**Запрошуємо вас
скористатися онлайн-
тренажерами для
ефективної підготовки до
НМТ з математики —
тренуйтеся, перевіряйте
знання та впевнено йдіть
до мети!**

*Перпендикуляр. Похила.
Теорема про три
перпендикуляри*



*Двогранний кут.
Перпендикулярність площин*



САМОСТІЙНИЙ БЛОК

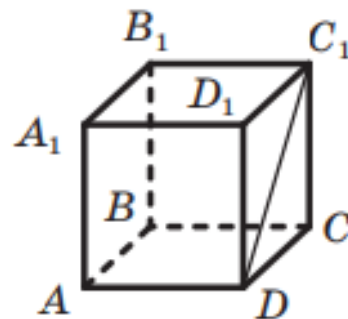
№1

У просторі задано пряму a та точку A , яка не належить прямій a . Скільки можна побудувати площин через дану точку A перпендикулярно до даної прямої?

А	Б	В	Г
Жодної	Одну	Безліч	Дві

№2

На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть проекцію відрізка $C_1 D$ на площину ABC .

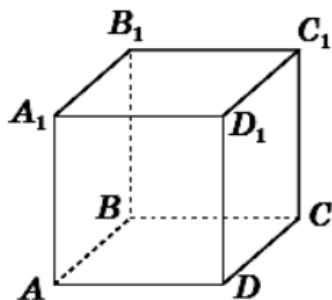


А	Б	В	Г
$C_1 D_1$	DD_1	CD	CC_1

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№3

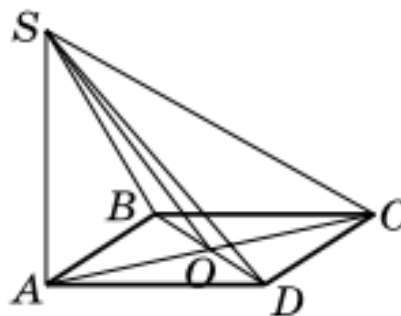
На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Яка з наведених прямих перпендикулярна площині $(AA_1 B_1)$.



А	Б	В	Г
$C_1 D_1$	$A_1 D_1$	CD	AC_1

№4

AS – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть усі прямокутні трикутники з вершиною в точці S

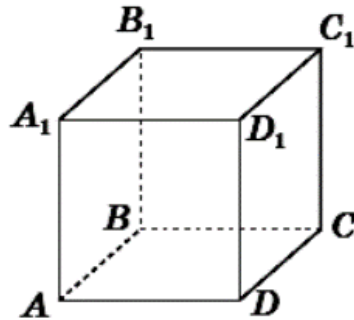


А	Б	В	Г
SAB, SAD, SDC	Тільки SAD	Тільки SAB	SDC, SBC

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№5

На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Яке взаємне розміщення прямої BC та площини $(AA_1 B_1)$.



А	Б	В	Г
Паралельні	Перпендикулярні	Перетинаються під кутом 45^0	Пряма BC належить площині $(AA_1 B_1)$

№6

У ΔABC , кут C є прямим. До площини трикутника проведено перпендикуляр PA . Яким є взаємне розміщення прямих PC та BC ?

А	Б	В	Г
Паралельні	Перпендикулярні	Перетинаються під кутом 45^0	Мимобіжні

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№7

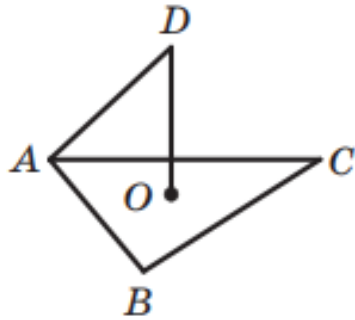
До кожного початку речення (1-3) доберіть його закінчення (А-Г) так, щоб утворилось правильне твердження.

	<i>Початок речення</i>		<i>Закінчення речення</i>
1.	До площини α проведено перпендикуляр завдовжки 3 см та похила – 5 см. Проекція похилої на площину дорівнює ...	А	$5\sqrt{3}$ см
2.	Довжина похилої на площину α дорівнює 13 см, а її проекція – 12 см. Довжина перпендикуляра до площини α дорівнює ...	Б	10 см
3.	Довжина перпендикуляра до площини α дорівнює $5\sqrt{2}$ см, а проекції похилої до цієї площини 5 см. Довжина похилої до площини α дорівнює...	В	5 см
		Г	4 см
		Д	$3\sqrt{3}$ см

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№8

Через центр O правильного трикутника ABC проведено пряму DO , перпендикулярну до площини ABC . Знайдіть довжину перпендикуляра DO , якщо $AB = 6$ см, $DA = 4$ см



А	Б	В	Г
4 см	5 см	2 см	$2\sqrt{3}$ см

№9

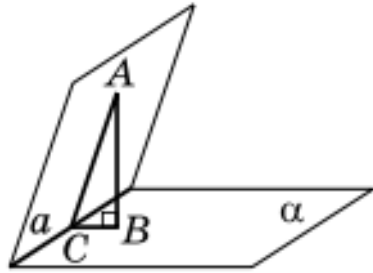
Із точки A проведено до площини a перпендикуляр AC та похилі AB і AD . Знайдіть проекцію похилої AD на площину a , якщо $\angle BAC = 45^\circ$, $AB = 8$ см, $AD = 9$ см.

А	Б	В	Г
7 см	9 см	12 см	8 см

САМОСТІЙНИЙ БЛОК

№10

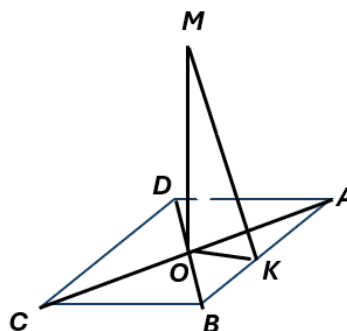
На одній із граней двогранного кута, величина якого дорівнює 30° , позначили точку A . Відстань від точки A до ребра двогранного кута дорівнює 18 см. Чому дорівнює відстань від точки A до другої грані двогранного кута?



А	Б	В	Г
18 см	12 см	9 см	15 см

№11

Відрізок MO – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, точка O – точка перетину діагоналей, точка K – середина сторони AB . Знайдіть сторону квадрата, якщо $MK = 13$ см, $MO = 12$ см.



А	Б	В	Г
5 см	10 см	15 см	4 см

Відповіді:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Б	В	Б	А	Б	Б	1. Г 2. В 3. А	В	А	В	Б

ПОРАДНИК

Для повторення матеріалу за темою «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» запрошуємо вас скористатися онлайн-уроками Всеукраїнської школи онлайн

Перпендикулярність прямої і площини



Перпендикуляр. Похила. Теорема про три перпендикуляри



Перпендикулярність площин



Двогранний кут

